Unit Numerik 2

Gruppe PT2

Dipl.-Math. Marco Boßle

Universität Stuttgart (IMNG)

E-Mail: Marco.Bossle@mathematik.uni-stuttgart.de

http://www.imng.uni-stuttgart.de/LstNumGeoMod/Bossle/

Iterative Löser für lineare Gleichungssysteme

Motivation (1/2)

Motivation (1/2)

- Aufgabe: Lösen eines quadratischen linearen Gleichungssystems $Ax = b$

Motivation (1/2)

- Aufgabe: Lösen eines quadratischen linearen Gleichungssystems $Ax = b$
- Methode: direkte Lösung z.B. mit Gauß-Elimination

Motivation (1/2)

- Aufgabe: Lösen eines quadratischen linearen Gleichungssystems $Ax = b$
- Methode: direkte Lösung z.B. mit Gauß-Elimination
- Schwierigkeiten:

Motivation (1/2)

- Aufgabe: Lösen eines quadratischen linearen Gleichungssystems $Ax = b$
- Methode: direkte Lösung z.B. mit Gauß-Elimination
- Schwierigkeiten:
  Rechenzeit bei großen Systemen

Motivation (1/2)

- Aufgabe: Lösen eines quadratischen linearen Gleichungssystems
  $Ax = b$
- Methode: direkte Lösung z.B. mit Gauß-Elimination
- Schwierigkeiten:
  Rechenzeit bei großen Systemen
  Es werden zur Lösung eines Systems mit n Unbekannten ca. $2n^3/3$ Rechenoperationen benötigt.
  ($n - 1$ Schritte mit je $2(n-k)^2$ Operationen).

Motivation (1/2)

- Aufgabe: Lösen eines quadratischen linearen Gleichungssystems $Ax = b$
- Methode: direkte Lösung z.B. mit Gauß-Elimination
- Schwierigkeiten:
  Rechenzeit bei großen Systemen
  Es werden zur Lösung eines Systems mit n Unbekannten ca. $2n^3/3$ Rechenoperationen benötigt.
  ($n - 1$ Schritte mit je $2(n-k)^2$ Operationen).
  Bei einem heute üblichen PC (4 Ghz CPU) bedeutet dies:

Unbekannte	Rechenzeit	
1 000	0.2	Sekunden

Motivation (1/2)

- Aufgabe: Lösen eines quadratischen linearen Gleichungssystems $Ax = b$
- Methode: direkte Lösung z.B. mit Gauß-Elimination
- Schwierigkeiten:
  Rechenzeit bei großen Systemen
  Es werden zur Lösung eines Systems mit n Unbekannten ca. $2n^3/3$ Rechenoperationen benötigt.
  ($n - 1$ Schritte mit je $2(n - k)^2$ Operationen).
  Bei einem heute üblichen PC (4 Ghz CPU) bedeutet dies:

Unbekannte	Rechenzeit	
1 000	0.2	Sekunden
10 000	2.8	Minuten

Motivation (1/2)

- Aufgabe: Lösen eines quadratischen linearen Gleichungssystems
  $Ax = b$
- Methode: direkte Lösung z.B. mit Gauß-Elimination
- Schwierigkeiten:
  Rechenzeit bei großen Systemen
  Es werden zur Lösung eines Systems mit n Unbekannten ca. $2n^3/3$ Rechenoperationen benötigt.
  ($n-1$ Schritte mit je $2(n-k)^2$ Operationen).
  Bei einem heute üblichen PC (4 Ghz CPU) bedeutet dies:

Unbekannte	Rechenzeit	
1 000	0.2	Sekunden
10 000	2.8	Minuten
100 000	1.9	Tage

Motivation (1/2)

- Aufgabe: Lösen eines quadratischen linearen Gleichungssystems $Ax = b$
- Methode: direkte Lösung z.B. mit Gauß-Elimination
- Schwierigkeiten:
  Rechenzeit bei großen Systemen
  Es werden zur Lösung eines Systems mit n Unbekannten ca. $2n^3/3$ Rechenoperationen benötigt.
  ($n-1$ Schritte mit je $2(n-k)^2$ Operationen).
  Bei einem heute üblichen PC (4 Ghz CPU) bedeutet dies:

Unbekannte	Rechenzeit	
1 000	0.2	Sekunden
10 000	2.8	Minuten
100 000	1.9	Tage
1 000 000	5.3	Jahre

Motivation (2/2)

Motivation (2/2)

- Große Gleichungssysteme treten auf

Motivation (2/2)

- Große Gleichungssysteme treten auf
  - Modellierung (CAD-Modell aus Meßdaten, Computertomographie)

Motivation (2/2)

- Große Gleichungssysteme treten auf
  - Modellierung (CAD-Modell aus Meßdaten, Computertomographie)
  - Simulation (Verformung, Alterungsprozess)

Motivation (2/2)

- Große Gleichungssysteme treten auf
  - Modellierung (CAD-Modell aus Meßdaten, Computertomographie)
  - Simulation (Verformung, Alterungsprozess)
  - Optimierung (Formanpassung)

Motivation (2/2)

- Große Gleichungssysteme treten auf
  - Modellierung (CAD-Modell aus Meßdaten, Computertomographie)
  - Simulation (Verformung, Alterungsprozess)
  - Optimierung (Formanpassung)
- Die Fragestellung benötigt meist keine exakte Lösung (Eingabedaten fehlerbehaftet, Herstellungsprozess ungenau)

Motivation (2/2)

- Große Gleichungssysteme treten auf
  - Modellierung (CAD-Modell aus Meßdaten, Computertomographie)
  - Simulation (Verformung, Alterungsprozess)
  - Optimierung (Formanpassung)
- Die Fragestellung benötigt meist keine exakte Lösung (Eingabedaten fehlerbehaftet, Herstellungsprozess ungenau)
- Idee: Schrittweise Annäherung an die Lösung

Motivation (2/2)

- Große Gleichungssysteme treten auf
  - Modellierung (CAD-Modell aus Meßdaten, Computertomographie)
  - Simulation (Verformung, Alterungsprozess)
  - Optimierung (Formanpassung)
- Die Fragestellung benötigt meist keine exakte Lösung (Eingabedaten fehlerbehaftet, Herstellungsprozess ungenau)
- Idee: Schrittweise Annäherung an die Lösung
  Verwendung eines Verfahren, das aus einer Näherungslösung y eine verbesserte Näherungslösung z bestimmt mit $|z-x| < |y-x|$ und dazu wenige(r) Rechenoperationen benötigt.

Motivation (2/2)

- Große Gleichungssysteme treten auf
  - Modellierung (CAD-Modell aus Meßdaten, Computertomographie)
  - Simulation (Verformung, Alterungsprozess)
  - Optimierung (Formanpassung)
- Die Fragestellung benötigt meist keine exakte Lösung (Eingabedaten fehlerbehaftet, Herstellungsprozess ungenau)
- Idee: Schrittweise Annäherung an die Lösung
  Verwendung eines Verfahren, das aus einer Näherungslösung y eine verbesserte Näherungslösung z bestimmt mit $|z - x| < |y - x|$ und dazu wenige(r) Rechenoperationen benötigt.
- Bedingungen an das Verfahren:

Motivation (2/2)

- Große Gleichungssysteme treten auf
  - Modellierung (CAD-Modell aus Meßdaten, Computertomographie)
  - Simulation (Verformung, Alterungsprozess)
  - Optimierung (Formanpassung)
- Die Fragestellung benötigt meist keine exakte Lösung (Eingabedaten fehlerbehaftet, Herstellungsprozess ungenau)
- Idee: Schrittweise Annäherung an die Lösung
  Verwendung eines Verfahren, das aus einer Näherungslösung y eine verbesserte Näherungslösung z bestimmt mit $|z - x| < |y - x|$ und dazu wenige(r) Rechenoperationen benötigt.
- Bedingungen an das Verfahren:
  - Ist die Lösung x erreicht, wird diese nicht mehr verändert (Konsistenz)

Motivation (2/2)

- Große Gleichungssysteme treten auf
  - Modellierung (CAD-Modell aus Meßdaten, Computertomographie)
  - Simulation (Verformung, Alterungsprozess)
  - Optimierung (Formanpassung)
- Die Fragestellung benötigt meist keine exakte Lösung (Eingabedaten fehlerbehaftet, Herstellungsprozess ungenau)
- Idee: Schrittweise Annäherung an die Lösung
  Verwendung eines Verfahren, das aus einer Näherungslösung y eine verbesserte Näherungslösung z bestimmt mit $|z - x| < |y - x|$ und dazu wenige(r) Rechenoperationen benötigt.
- Bedingungen an das Verfahren:
  - Ist die Lösung x erreicht, wird diese nicht mehr verändert (Konsistenz)
  - Wird das Verfahren mehrfach verwendet, werden die Veränderungen immer kleiner (Konvergenz)

Jacobi-Verfahren

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & a_{1,3}x_3 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\
a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & a_{2,3}x_3 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\
a_{3,1}x_1 & + & a_{3,2}x_2 & + & a_{3,3}x_3 & + & \cdots & + & a_{3,n}x_n & = & b_3 \\
 & & & & \vdots & & & & & & \\
a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & a_{n,3}x_3 & + & \cdots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n
\end{array}$$

Jacobi-Verfahren

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{1,1}\color{red}{x_1} & + & a_{1,2}x_2 & + & a_{1,3}x_3 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\
a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & a_{2,3}x_3 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\
a_{3,1}x_1 & + & a_{3,2}x_2 & + & a_{3,3}x_3 & + & \cdots & + & a_{3,n}x_n & = & b_3 \\
 & & & & \vdots & & & & & & \\
a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & a_{n,3}x_3 & + & \cdots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n
\end{array}$$

Auflösen der ersten Gleichung nach $\color{red}{x_1}$

Jacobi-Verfahren

Lineares Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & a_{1,3}x_3 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\
a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & a_{2,3}x_3 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\
a_{3,1}x_1 & + & a_{3,2}x_2 & + & a_{3,3}x_3 & + & \cdots & + & a_{3,n}x_n & = & b_3 \\
 & & & & \vdots & & & & & & \\
a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & a_{n,3}x_3 & + & \cdots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n
\end{array}
$$

Auflösen der ersten Gleichung nach x_1

Jacobi-Verfahren

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{1,1}x_1 & = & b_1 & - & a_{1,2}x_2 & - & a_{1,3}x_3 & - & \cdots & - & a_{1,n}x_n \\
a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & a_{2,3}x_3 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\
a_{3,1}x_1 & + & a_{3,2}x_2 & + & a_{3,3}x_3 & + & \cdots & + & a_{3,n}x_n & = & b_3 \\
 & & & & \vdots & & & & & & \\
a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & a_{n,3}x_3 & + & \cdots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n
\end{array}$$

Auflösen der ersten Gleichung nach x_1

Jacobi-Verfahren

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{1,1}x_1 & = & b_1 & - & a_{1,2}x_2 & - & a_{1,3}x_3 & - & \cdots & - & a_{1,n}x_n \\
a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & a_{2,3}x_3 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\
a_{3,1}x_1 & + & a_{3,2}x_2 & + & a_{3,3}x_3 & + & \cdots & + & a_{3,n}x_n & = & b_3 \\
 & & & & \vdots & & & & & & \\
a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & a_{n,3}x_3 & + & \cdots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n
\end{array}$$

Auflösen der ersten Gleichung nach x_1

Jacobi-Verfahren

Lineares Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
x_1 & = & (b_1 & - & a_{1,2}x_2 & - & a_{1,3}x_3 & - & \cdots & - & a_{1,n}x_n)/a_{1,1} & & \\
a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & a_{2,3}x_3 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\
a_{3,1}x_1 & + & a_{3,2}x_2 & + & a_{3,3}x_3 & + & \cdots & + & a_{3,n}x_n & = & b_3 \\
 & & & & \vdots & & & & & & \\
a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & a_{n,3}x_3 & + & \cdots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n
\end{array}
$$

Auflösen der ersten Gleichung nach x_1

Jacobi-Verfahren

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
x_1 & = & (b_1 & - & a_{1,2}x_2 & - & a_{1,3}x_3 & - & \cdots & - & a_{1,n}x_n)/a_{1,1} & & \\
a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}\color{red}{x_2} & + & a_{2,3}x_3 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 & & \\
a_{3,1}x_1 & + & a_{3,2}x_2 & + & a_{3,3}x_3 & + & \cdots & + & a_{3,n}x_n & = & b_3 & & \\
 & & & & \vdots & & & & & & & & \\
a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & a_{n,3}x_3 & + & \cdots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n & &
\end{array}$$

Auflösen der zweiten Gleichung nach $\color{red}{x_2}$

Jacobi-Verfahren

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & = & (b_1 & - & a_{1,2}x_2 & - & a_{1,3}x_3 & - & \cdots & - & a_{1,n}x_n)/a_{1,1} \\
a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & a_{2,3}x_3 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\
a_{3,1}x_1 & + & a_{3,2}x_2 & + & a_{3,3}x_3 & + & \cdots & + & a_{3,n}x_n & = & b_3 \\
 & & & & \vdots & & & & & & \\
a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & a_{n,3}x_3 & + & \cdots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n
\end{array}$$

Auflösen der zweiten Gleichung nach x_2

Jacobi-Verfahren

Lineares Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & = & (b_1 & - & a_{1,2}x_2 & - & a_{1,3}x_3 & - & \cdots & - & a_{1,n}x_n)/a_{1,1} \\
a_{2,2}x_2 & = & b_2 & - & a_{2,1}x_1 & - & a_{2,3}x_3 & - & \cdots & - & a_{2,n}x_n \\
a_{3,1}x_1 & + & a_{3,2}x_2 & + & a_{3,3}x_3 & + & \cdots & + & a_{3,n}x_n & = & b_3 \\
 & & & & \vdots & & & & & & \\
a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & a_{n,3}x_3 & + & \cdots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n
\end{array}
$$

Auflösen der zweiten Gleichung nach x_2

Jacobi-Verfahren

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & = & (b_1 & - & a_{1,2}x_2 & - & a_{1,3}x_3 & - & \cdots & - & a_{1,n}x_n)/a_{1,1} \\
{\color{red}a_{2,2}}{\color{blue}x_2} & = & b_2 & - & a_{2,1}x_1 & - & a_{2,3}x_3 & - & \cdots & - & a_{2,n}x_n \\
a_{3,1}x_1 & + & a_{3,2}x_2 & + & a_{3,3}x_3 & + & \cdots & + & a_{3,n}x_n & = & b_3 \\
 & & & & \vdots & & & & & & \\
a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & a_{n,3}x_3 & + & \cdots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n
\end{array}$$

Auflösen der zweiten Gleichung nach ${\color{blue}x_2}$

Jacobi-Verfahren

Lineares Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & = & (b_1 & - & a_{1,2}x_2 & - & a_{1,3}x_3 & - & \cdots & - & a_{1,n}x_n)/a_{1,1} \\
\color{blue}{x_2} & = & \color{red}{(}b_2 & - & a_{2,1}x_1 & - & a_{2,3}x_3 & - & \cdots & - & a_{2,n}x_n\color{red}{)/a_{2,2}} \\
a_{3,1}x_1 & + & a_{3,2}x_2 & + & a_{3,3}x_3 & + & \cdots & + & a_{3,n}x_n & = & b_3 \\
 & & & & \vdots & & & & & & \\
a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & a_{n,3}x_3 & + & \cdots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n
\end{array}
$$

Auflösen der zweiten Gleichung nach $\color{blue}{x_2}$

Jacobi-Verfahren

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & = & (b_1 & - & a_{1,2}x_2 & - & a_{1,3}x_3 & - & \cdots & - & a_{1,n}x_n)/a_{1,1} \\
x_2 & = & (b_2 & - & a_{2,1}x_1 & - & a_{2,3}x_3 & - & \cdots & - & a_{2,n}x_n)/a_{2,2} \\
a_{3,1}x_1 & + & a_{3,2}x_2 & + & a_{3,3}{\color{red}x_3} & + & \cdots & + & a_{3,n}x_n & = & b_3 \\
 & & & & \vdots & & & & & & \\
a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & a_{n,3}x_3 & + & \cdots & + & a_{n,n}{\color{red}x_n} & = & b_n
\end{array}$$

Auflösen der $k-$Gleichung nach ${\color{red}x_k}$

Jacobi-Verfahren

Lineares Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{rcllllllllll}
x_1 & = & (b_1 & - & a_{1,2}x_2 & - & a_{1,3}x_3 & - & \cdots & - & a_{1,n}x_n)/a_{1,1} \\
x_2 & = & (b_2 & - & a_{2,1}x_1 & - & a_{2,3}x_3 & - & \cdots & - & a_{2,n}x_n)/a_{2,2} \\
x_3 & = & (b_3 & - & a_{3,1}x_1 & - & a_{3,2}x_2 & - & \cdots & - & a_{3,n}x_n)/a_{3,3} \\
 & & & & \vdots & & & & & & \\
x_n & = & (b_n & - & a_{n,1}x_1 & - & a_{n,2}x_2 & - & \cdots & - & a_{n,n-1}x_{n-1})/a_{n,n}
\end{array}
$$

Jacobi-Verfahren

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & = & (b_1 & - & a_{1,2}x_2 & - & a_{1,3}x_3 & - & \cdots & - & a_{1,n}x_n)/a_{1,1} \\
x_2 & = & (b_2 & - & a_{2,1}x_1 & - & a_{2,3}x_3 & - & \cdots & - & a_{2,n}x_n)/a_{2,2} \\
x_3 & = & (b_3 & - & a_{3,1}x_1 & - & a_{3,2}x_2 & - & \cdots & - & a_{3,n}x_n)/a_{3,3} \\
 & & & & \vdots & & & & & & \\
x_n & = & (b_n & - & a_{n,1}x_1 & - & a_{n,2}x_2 & - & \cdots & - & a_{n,n-1}x_{n-1})/a_{n,n}
\end{array}
$$

Ersetzt man auf der rechten Seite x_k mit y_k

Jacobi-Verfahren

$$
\begin{array}{rcllllllll}
x_1 & = & (b_1 & - & a_{1,2}y_2 & - & a_{1,3}y_3 & - & \cdots & - & a_{1,n}y_n)/a_{1,1} \\
x_2 & = & (b_2 & - & a_{2,1}y_1 & - & a_{2,3}y_3 & - & \cdots & - & a_{2,n}y_n)/a_{2,2} \\
x_3 & = & (b_3 & - & a_{3,1}y_1 & - & a_{3,2}y_2 & - & \cdots & - & a_{3,n}y_n)/a_{3,3} \\
 & & & & \vdots & & & & & & \\
x_n & = & (b_n & - & a_{n,1}y_1 & - & a_{n,2}y_2 & - & \cdots & - & a_{n,n-1}y_{n-1})/a_{n,n}
\end{array}
$$

Ersetzt man auf der rechten Seite x_k mit y_k

Jacobi-Verfahren

$$
\begin{array}{lllllllllll}
x_1 & = & (b_1 & - & a_{1,2}y_2 & - & a_{1,3}y_3 & - & \cdots & - & a_{1,n}y_n)/a_{1,1} \\
x_2 & = & (b_2 & - & a_{2,1}y_1 & - & a_{2,3}y_3 & - & \cdots & - & a_{2,n}y_n)/a_{2,2} \\
x_3 & = & (b_3 & - & a_{3,1}y_1 & - & a_{3,2}y_2 & - & \cdots & - & a_{3,n}y_n)/a_{3,3} \\
 & & & & \vdots & & & & & & \\
x_n & = & (b_n & - & a_{n,1}y_1 & - & a_{n,2}y_2 & - & \cdots & - & a_{n,n-1}y_{n-1})/a_{n,n}
\end{array}
$$

Ersetzt man auf der rechten Seite x_k mit y_k
und auf der linken Seite x_k mit z_k

Jacobi-Verfahren

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
z_1 & = & (b_1 & - & a_{1,2}y_2 & - & a_{1,3}y_3 & - & \cdots & - & a_{1,n}y_n)/a_{1,1} \\
z_2 & = & (b_2 & - & a_{2,1}y_1 & - & a_{2,3}y_3 & - & \cdots & - & a_{2,n}y_n)/a_{2,2} \\
z_3 & = & (b_3 & - & a_{3,1}y_1 & - & a_{3,2}y_2 & - & \cdots & - & a_{3,n}y_n)/a_{3,3} \\
 & & & & \vdots & & & & & & \\
z_n & = & (b_n & - & a_{n,1}y_1 & - & a_{n,2}y_2 & - & \cdots & - & a_{n,n-1}y_{n-1})/a_{n,n}
\end{array}
$$

Ersetzt man auf der rechten Seite x_k mit y_k
und auf der linken Seite x_k mit z_k

Jacobi-Verfahren

Iterationsvorschrift $y \rightarrow z$

$$
\begin{array}{lclclclclcl}
z_1 & = & (b_1 & - & a_{1,2}y_2 & - & a_{1,3}y_3 & - & \cdots & - & a_{1,n}y_n)/a_{1,1} \\
z_2 & = & (b_2 & - & a_{2,1}y_1 & - & a_{2,3}y_3 & - & \cdots & - & a_{2,n}y_n)/a_{2,2} \\
z_3 & = & (b_3 & - & a_{3,1}y_1 & - & a_{3,2}y_2 & - & \cdots & - & a_{3,n}y_n)/a_{3,3} \\
 & & & & \vdots & & & & & & \\
z_n & = & (b_n & - & a_{n,1}y_1 & - & a_{n,2}y_2 & - & \cdots & - & a_{n,n-1}y_{n-1})/a_{n,n}
\end{array}
$$

Ersetzt man auf der rechten Seite x_k mit y_k
und auf der linken Seite x_k mit z_k
erhält man das Iterationsverfahren von Jacobi
(Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804–1851)

Jacobi-Verfahren

Iterationsvorschrift $y \rightarrow z$

$$\begin{array}{lcllllllll}
z_1 & = & (b_1 & - & a_{1,2}y_2 & - & a_{1,3}y_3 & - & \cdots & - & a_{1,n}y_n)/a_{1,1} \\
z_2 & = & (b_2 & - & a_{2,1}y_1 & - & a_{2,3}y_3 & - & \cdots & - & a_{2,n}y_n)/a_{2,2} \\
z_3 & = & (b_3 & - & a_{3,1}y_1 & - & a_{3,2}y_2 & - & \cdots & - & a_{3,n}y_n)/a_{3,3} \\
 & & & & \vdots & & & & & & \\
z_n & = & (b_n & - & a_{n,1}y_1 & - & a_{n,2}y_2 & - & \cdots & - & a_{n,n-1}y_{n-1})/a_{n,n}
\end{array}$$

Nach der Herleitung ist klar, dass das Verfahren konsistent ist.

Jacobi-Verfahren in Matrix-Form

Lineares Gleichungssystem:

$$Ax = b$$

Jacobi-Verfahren in Matrix-Form

Lineares Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
Ax &= b \\
(D + A - D)x &= b
\end{aligned}
$$

Aufteilung der Matrix A in eine Diagonalmatrix D und eine Restmatrix $A-D$

Jacobi-Verfahren in Matrix-Form

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ (D + A - D)x &= b \\ Dx + (A - D)x &= b \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren

Jacobi-Verfahren in Matrix-Form

Lineares Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{rcl|rcl}
Ax & = & b & Dx & = & b-(A-D)x \\
(D+A-D)x & = & b & & & \\
Dx+(A-D)x & = & b & & &
\end{array}
$$

Subtraktion von $(A-D)x$ auf beiden Seiten der Gleichung

Jacobi-Verfahren in Matrix-Form

Lineares Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{rcl|rcl}
Ax & = & b & Dx & = & b - (A - D)x \\
(D + A - D)x & = & b & D^{-1}Dx & = & D^{-1}(b - (A - D)x) \\
Dx + (A - D)x & = & b & & &
\end{array}
$$

Multiplikation mit der inversen D^{-1} der Diagonalmatrix

Jacobi-Verfahren in Matrix-Form

Lineares Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{rcl|rcl}
Ax & = & b & Dx & = & b - (A-D)x \\
(D + A - D)x & = & b & D^{-1}Dx & = & D^{-1}(b - (A-D)x) \\
Dx + (A-D)x & = & b & x & = & D^{-1}b - D^{-1}(A-D)x
\end{array}
$$

Ausmultiplizieren

Jacobi-Verfahren in Matrix-Form

Lineares Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{rcl|rcl}
Ax & = & b & Dx & = & b-(A-D)x \\
(D+A-D)x & = & b & D^{-1}Dx & = & D^{-1}(b-(A-D)x) \\
Dx+(A-D)x & = & b & x & = & D^{-1}b-D^{-1}(A-D)x \\
 & & & x & = & D^{-1}b-(D^{-1}A-D^{-1}D)x
\end{array}
$$

Ausmultiplizieren

Jacobi-Verfahren in Matrix-Form

Lineares Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{rcl|rcl}
Ax & = & b & Dx & = & b-(A-D)x \\
(D+A-D)x & = & b & D^{-1}Dx & = & D^{-1}(b-(A-D)x) \\
Dx+(A-D)x & = & b & x & = & D^{-1}b-D^{-1}(A-D)x \\
 & & & x & = & D^{-1}b-(D^{-1}A-D^{-1}D)x \\
 & & & x & = & D^{-1}b-(D^{-1}A-E)x
\end{array}
$$

Ersetzen des Produkts $D^{-1}D$ mit der Einheitsmatrix E

Jacobi-Verfahren in Matrix-Form

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ (D + A - D)x &= b \\ Dx + (A - D)x &= b \end{aligned} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} Dx &= b - (A - D)x \\ D^{-1}Dx &= D^{-1}(b - (A - D)x) \\ x &= D^{-1}b - D^{-1}(A - D)x \\ x &= D^{-1}b - (D^{-1}A - D^{-1}D)x \\ x &= D^{-1}b - (D^{-1}A - E)x \\ x &= \underbrace{(E - D^{-1}A)}_{Q}x + \underbrace{D^{-1}b}_{p} \end{aligned}$$

Umstellung der Terme und Einführung neuer Bezeichner

Jacobi-Verfahren in Matrix-Form

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcl|rcl} Ax &=& b & Dx &=& b-(A-D)x \\ (D+A-D)x &=& b & D^{-1}Dx &=& D^{-1}(b-(A-D)x) \\ Dx+(A-D)x &=& b & x &=& D^{-1}b-D^{-1}(A-D)x \\ & & & x &=& D^{-1}b-(D^{-1}A-D^{-1}D)x \\ & & & x &=& D^{-1}b-(D^{-1}A-E)x \\ & & & x &=& \underbrace{(E-D^{-1}A)}_{Q}x+\underbrace{D^{-1}b}_{p} \end{array}$$

Lineares Iterationsverfahren $y \to z$:

$$z = Qy + p$$

Konvergenz eines linearen Iterationsverfahrens

Erster Iterationsschritt $\quad y \to z: \quad z = Qy + p$

Konvergenz eines linearen Iterationsverfahrens

Erster Iterationsschritt	$y \to z$:	$z = Qy + p$
Zweiter Iterationsschritt	$z = \tilde{y} \to \tilde{z}$:	$\tilde{z} = Q\tilde{y} + p$

Konvergenz eines linearen Iterationsverfahrens

Erster Iterationsschritt	$y \to z$:	$z = Qy + p$
Zweiter Iterationsschritt	$z = \tilde{y} \to \tilde{z}$:	$\tilde{z} = Q\tilde{y} + p$

Vergleiche Veränderungen:

Konvergenz eines linearen Iterationsverfahrens

Erster Iterationsschritt	$y \to z$:	$z = Qy + p$
Zweiter Iterationsschritt	$z = \tilde{y} \to \tilde{z}$:	$\tilde{z} = Q\tilde{y} + p$

Vergleiche Veränderungen:

$\tilde{z} - \tilde{y}$

Konvergenz eines linearen Iterationsverfahrens

Erster Iterationsschritt	$y \to z$:	$z = Qy + p$
Zweiter Iterationsschritt	$z = \tilde{y} \to \tilde{z}$:	$\tilde{z} = Q\tilde{y} + p$

Vergleiche Veränderungen:

$\tilde{z} - \tilde{y} = Q\tilde{y} + p - \tilde{y}$

Konvergenz eines linearen Iterationsverfahrens

Erster Iterationsschritt	$y \to z$	:	$z = Qy + p$
Zweiter Iterationsschritt	$z = \tilde{y} \to \tilde{z}$	:	$\tilde{z} = Q\tilde{y} + p$

Vergleiche Veränderungen:

$$\tilde{z} - \tilde{y} = Q\tilde{y} + p - \tilde{y} = Qz + p - z$$

Konvergenz eines linearen Iterationsverfahrens

Erster Iterationsschritt	$y \to z$:	$z = Qy + p$
Zweiter Iterationsschritt	$z = \tilde{y} \to \tilde{z}$:	$\tilde{z} = Q\tilde{y} + p$

Vergleiche Veränderungen:

$$\tilde{z} - \tilde{y} = Q\tilde{y} + p - \tilde{y} = Qz + p - z = Qz + p - (Qy + p)$$

Konvergenz eines linearen Iterationsverfahrens

Erster Iterationsschritt	$y \to z$:	$z = Qy + p$
Zweiter Iterationsschritt	$z = \tilde{y} \to \tilde{z}$:	$\tilde{z} = Q\tilde{y} + p$

Vergleiche Veränderungen:

$$\tilde{z} - \tilde{y} = Q\tilde{y} + p - \tilde{y} = Qz + p - z = Qz + p - (Qy + p) = Qz - Qy$$

Konvergenz eines linearen Iterationsverfahrens

Erster Iterationsschritt	$y \to z$:	$z = Qy + p$
Zweiter Iterationsschritt	$z = \tilde{y} \to \tilde{z}$:	$\tilde{z} = Q\tilde{y} + p$

Vergleiche Veränderungen:

$$\tilde{z} - \tilde{y} = Q\tilde{y} + p - \tilde{y} = Qz + p - z = Qz + p - (Qy + p) = Qz - Qy = Q(z - y)$$

Konvergenz eines linearen Iterationsverfahrens

Erster Iterationsschritt	$y \to z$:	$z = Qy + p$
Zweiter Iterationsschritt	$z = \tilde{y} \to \tilde{z}$:	$\tilde{z} = Q\tilde{y} + p$

Vergleiche Veränderungen:

$$\tilde{z} - \tilde{y} = Q\tilde{y} + p - \tilde{y} = Qz + p - z = Qz + p - (Qy + p) = Qz - Qy = Q(z - y)$$

Falls alle Eigenwerte von Q betragsmäßig kleiner 1 sind gilt:

$$|\tilde{z} - \tilde{y}| \leq |z - y|\,.$$

Konvergenz eines linearen Iterationsverfahrens

Erster Iterationsschritt	$y \to z$:	$z = Qy + p$
Zweiter Iterationsschritt	$z = \tilde{y} \to \tilde{z}$:	$\tilde{z} = Q\tilde{y} + p$

Vergleiche Veränderungen:

$$\tilde{z}-\tilde{y} = Q\tilde{y}+p-\tilde{y} = Qz+p-z = Qz+p-(Qy+p) = Qz-Qy = Q(z-y)$$

Falls alle Eigenwerte von Q betragsmäßig kleiner 1 sind gilt:

$$|\tilde{z} - \tilde{y}| \leq |z - y| \,.$$

Ein lineares Iterationsverfahren konvergiert, wenn der größte Betrag aller Eigenwerte der Iterationsmatrix Q (Spektralradius) kleiner als 1 ist.

Konvergenz des Jacobi-Verfahrens

Eine Matrix heißt strikt diagonaldominant, falls in jeder Zeile der Betrag des Diagonalelements größer als die Summe der Beträge der anderen Elemente ist, d.h. falls

$$|a_{k,k}| > \sum_{\substack{\ell = 1 \\ \ell \neq k}}^{n} |a_{k,\ell}|, \quad k = 1, \ldots, n$$

Konvergenz des Jacobi-Verfahrens

Eine Matrix heißt strikt diagonaldominant, falls in jeder Zeile der Betrag des Diagonalelements größer als die Summe der Beträge der anderen Elemente ist, d.h. falls

$$|a_{k,k}| > \sum_{\substack{\ell = 1 \\ \ell \neq k}}^{n} |a_{k,\ell}|, \quad k = 1, \dots, n$$

Das Jacobi-Verfahren zur iterativen Annäherung an die Lösung x eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ konvergiert, falls die Matrix A strikt diagonaldominant ist.

Konvergenz des Jacobi-Verfahrens

Eine Matrix heißt strikt diagonaldominant, falls in jeder Zeile der Betrag des Diagonalelements größer als die Summe der Beträge der anderen Elemente ist, d.h. falls

$$|a_{k,k}| > \sum_{\substack{\ell = 1 \\ \ell \neq k}}^{n} |a_{k,\ell}|, \quad k = 1, \ldots, n$$

Das Jacobi-Verfahren zur iterativen Annäherung an die Lösung x eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ konvergiert, falls die Matrix A strikt diagonaldominant ist.

Bemerkung:

Dieses Kriterium ist hinreichend für die Konvergenz – nicht notwendig. Es gibt auch andere Matrizen, für die das Jacobi-Verfahren konvergiert.

Beispiel zum Jacobi-Verfahren (1/3) - Iterationsmatrix

Beispiel zum Jacobi-Verfahren (1/3) - Iterationsmatrix

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \text{Lösung: } x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Beispiel zum Jacobi-Verfahren (1/3) - Iterationsmatrix

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \text{Lösung: } x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Iterationsmatrix:

Beispiel zum Jacobi-Verfahren (1/3) - Iterationsmatrix

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \text{Lösung: } x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Iterationsmatrix:

$$Q = E - D^{-1} A$$

Beispiel zum Jacobi-Verfahren (1/3) - Iterationsmatrix

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \text{Lösung: } x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Iterationsmatrix:

$$Q = E - D^{-1} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel zum Jacobi-Verfahren (1/3) - Iterationsmatrix

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \text{Lösung: } x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Iterationsmatrix:

$$Q = E - D^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Beispiel zum Jacobi-Verfahren (1/3) - Iterationsmatrix

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \text{Lösung: } x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Iterationsmatrix:

$$Q = E - D^{-1} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Beispiel zum Jacobi-Verfahren (1/3) - Iterationsmatrix

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \text{Lösung: } x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Iterationsmatrix:

$$Q = E - D^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel zum Jacobi-Verfahren (1/3) - Iterationsmatrix

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \text{Lösung: } x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Iterationsmatrix:

$$Q = E - D^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel zum Jacobi-Verfahren (1/3) - Iterationsmatrix

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \text{Lösung: } x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Iterationsmatrix:

$$Q = E - D^{-1}A = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel zum Jacobi-Verfahren (1/3) - Iterationsmatrix

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \text{Lösung: } x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Iterationsmatrix:

$$Q = E - D^{-1}A = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p = D^{-1}b$$

Beispiel zum Jacobi-Verfahren (1/3) - Iterationsmatrix

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \text{Lösung: } x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Iterationsmatrix:

$$Q = E - D^{-1}A = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p = D^{-1}b = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Beispiel zum Jacobi-Verfahren (2/3) - Iteration

$$Q = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad p = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad y =$$

Beispiel zum Jacobi-Verfahren (2/3) - Iteration

$$Q = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad p = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel zum Jacobi-Verfahren (2/3) - Iteration

$$Q = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad p = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z = Qy + p$$

Beispiel zum Jacobi-Verfahren (2/3) - Iteration

$$Q = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad p = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z \quad = \quad Qy + p = p$$

Beispiel zum Jacobi-Verfahren (2/3) - Iteration

$$Q = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad p = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z = Qy + p = p = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}$$

Beispiel zum Jacobi-Verfahren (2/3) - Iteration

$$Q = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad p = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} z &= Qy + p = p = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/3 \\ 7/3 \end{pmatrix} = \tilde{y} \\ \tilde{z} &= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/3 \\ 7/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/3 \\ 7/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beispiel zum Jacobi-Verfahren (2/3) - Iteration

$$Q = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad p = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} z &= Qy + p = p = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/3 \\ 7/3 \end{pmatrix} \\ \tilde{z} &= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/3 \\ 7/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/3 \\ 7/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/9 \\ 7/9 \\ 16/9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beispiel zum Jacobi-Verfahren (2/3) - Iteration

$$Q = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad p = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} z &= Qy + p = p = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/3 \\ 7/3 \end{pmatrix} \\ \tilde{z} &= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/3 \\ 7/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/3 \\ 7/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/9 \\ 7/9 \\ 16/9 \end{pmatrix} = \tilde{y} \\ \tilde{\tilde{z}} &= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2/9 \\ 7/9 \\ 16/9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/3 \\ 7/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beispiel zum Jacobi-Verfahren (2/3) - Iteration

$$Q = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad p = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} z &= Qy + p = p = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/3 \\ 7/3 \end{pmatrix} \\ \tilde{z} &= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/3 \\ 7/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/3 \\ 7/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/9 \\ 7/9 \\ 16/9 \end{pmatrix} \\ \tilde{\tilde{z}} &= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2/9 \\ 7/9 \\ 16/9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/3 \\ 7/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/27 \\ 31/27 \\ 56/27 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beispiel zum Jacobi-Verfahren (3/3) - Fehlerbetrachtung

$$z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}, \; \tilde{z} = \begin{pmatrix} -2/9 \\ 7/9 \\ 16/9 \end{pmatrix}, \; \tilde{\tilde{z}} = \begin{pmatrix} 2/27 \\ 31/27 \\ 56/27 \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Beispiel zum Jacobi-Verfahren (3/3) - Fehlerbetrachtung

$$z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}, \ \tilde{z} = \begin{pmatrix} -2/9 \\ 7/9 \\ 16/9 \end{pmatrix}, \ \tilde{\tilde{z}} = \begin{pmatrix} 2/27 \\ 31/27 \\ 56/27 \end{pmatrix}, \ x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Fehler der Näherungen:

Beispiel zum Jacobi-Verfahren (3/3) - Fehlerbetrachtung

$$z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}, \ \tilde{z} = \begin{pmatrix} -2/9 \\ 7/9 \\ 16/9 \end{pmatrix}, \ \tilde{\tilde{z}} = \begin{pmatrix} 2/27 \\ 31/27 \\ 56/27 \end{pmatrix}, \ x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Fehler der Näherungen:

$$|z - x|$$

Beispiel zum Jacobi-Verfahren (3/3) - Fehlerbetrachtung

$$z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}, \ \tilde{z} = \begin{pmatrix} -2/9 \\ 7/9 \\ 16/9 \end{pmatrix}, \ \tilde{\tilde{z}} = \begin{pmatrix} 2/27 \\ 31/27 \\ 56/27 \end{pmatrix}, \ x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Fehler der Näherungen:

$$|z - x| \quad = \quad \sqrt{\frac{1+4+1}{9}}$$

Beispiel zum Jacobi-Verfahren (3/3) - Fehlerbetrachtung

$$z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}, \ \tilde{z} = \begin{pmatrix} -2/9 \\ 7/9 \\ 16/9 \end{pmatrix}, \ \tilde{\tilde{z}} = \begin{pmatrix} 2/27 \\ 31/27 \\ 56/27 \end{pmatrix}, \ x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Fehler der Näherungen:

$$|z - x| \quad = \quad \sqrt{\frac{1+4+1}{9}} \qquad = \sqrt{2/3}$$

Beispiel zum Jacobi-Verfahren (3/3) - Fehlerbetrachtung

$$z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}, \ \tilde{z} = \begin{pmatrix} -2/9 \\ 7/9 \\ 16/9 \end{pmatrix}, \ \tilde{\tilde{z}} = \begin{pmatrix} 2/27 \\ 31/27 \\ 56/27 \end{pmatrix}, \ x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Fehler der Näherungen:

$$|z - x| = \sqrt{\frac{1+4+1}{9}} = \sqrt{2/3}$$

$$|\tilde{z} - x|$$

Beispiel zum Jacobi-Verfahren (3/3) - Fehlerbetrachtung

$$z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}, \; \tilde{z} = \begin{pmatrix} -2/9 \\ 7/9 \\ 16/9 \end{pmatrix}, \; \tilde{\tilde{z}} = \begin{pmatrix} 2/27 \\ 31/27 \\ 56/27 \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Fehler der Näherungen:

$$\begin{aligned} |z - x| &= \sqrt{\frac{1+4+1}{9}} \qquad = \sqrt{2/3} \\ |\tilde{z} - x| &= \sqrt{\frac{4+4+4}{81}} \end{aligned}$$

Beispiel zum Jacobi-Verfahren (3/3) - Fehlerbetrachtung

$$z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}, \; \tilde{z} = \begin{pmatrix} -2/9 \\ 7/9 \\ 16/9 \end{pmatrix}, \; \tilde{\tilde{z}} = \begin{pmatrix} 2/27 \\ 31/27 \\ 56/27 \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Fehler der Näherungen:

$$\begin{aligned} |z - x| &= \sqrt{\frac{1+4+1}{9}} &= \sqrt{2/3} \\ |\tilde{z} - x| &= \sqrt{\frac{4+4+4}{81}} &= \sqrt{4/27} \end{aligned}$$

Beispiel zum Jacobi-Verfahren (3/3) - Fehlerbetrachtung

$$z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}, \; \tilde{z} = \begin{pmatrix} -2/9 \\ 7/9 \\ 16/9 \end{pmatrix}, \; \tilde{\tilde{z}} = \begin{pmatrix} 2/27 \\ 31/27 \\ 56/27 \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Fehler der Näherungen:

$$\begin{aligned} |z - x| &= \sqrt{\frac{1+4+1}{9}} &&= \sqrt{2/3} \\ |\tilde{z} - x| &= \sqrt{\frac{4+4+4}{81}} &&= \sqrt{4/27} \\ |\tilde{\tilde{z}} - x| & \end{aligned}$$

Beispiel zum Jacobi-Verfahren (3/3) - Fehlerbetrachtung

$$z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}, \; \tilde{z} = \begin{pmatrix} -2/9 \\ 7/9 \\ 16/9 \end{pmatrix}, \; \tilde{\tilde{z}} = \begin{pmatrix} 2/27 \\ 31/27 \\ 56/27 \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Fehler der Näherungen:

$$\begin{aligned} |z - x| &= \sqrt{\frac{1+4+1}{9}} &&= \sqrt{2/3} \\ |\tilde{z} - x| &= \sqrt{\frac{4+4+4}{81}} &&= \sqrt{4/27} \\ |\tilde{\tilde{z}} - x| &= \sqrt{\frac{4+16+4}{729}} && \end{aligned}$$

Beispiel zum Jacobi-Verfahren (3/3) - Fehlerbetrachtung

$$z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}, \; \tilde{z} = \begin{pmatrix} -2/9 \\ 7/9 \\ 16/9 \end{pmatrix}, \; \tilde{\tilde{z}} = \begin{pmatrix} 2/27 \\ 31/27 \\ 56/27 \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Fehler der Näherungen:

$$\begin{aligned} |z - x| &= \sqrt{\frac{1+4+1}{9}} &&= \sqrt{2/3} \\ |\tilde{z} - x| &= \sqrt{\frac{4+4+4}{81}} &&= \sqrt{4/27} \\ |\tilde{\tilde{z}} - x| &= \sqrt{\frac{4+16+4}{729}} &&= \sqrt{8/243} \end{aligned}$$

Beispiel zum Jacobi-Verfahren (3/3) - Fehlerbetrachtung

$$z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}, \ \tilde{z} = \begin{pmatrix} -2/9 \\ 7/9 \\ 16/9 \end{pmatrix}, \ \tilde{\tilde{z}} = \begin{pmatrix} 2/27 \\ 31/27 \\ 56/27 \end{pmatrix}, \ x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Fehler der Näherungen:

$$\begin{aligned}
|z - x| &= \sqrt{\frac{1+4+1}{9}} &&= \sqrt{2/3} \\
|\tilde{z} - x| &= \sqrt{\frac{4+4+4}{81}} &&= \sqrt{4/27} \\
|\tilde{\tilde{z}} - x| &= \sqrt{\frac{4+16+4}{729}} &&= \sqrt{8/243}
\end{aligned}$$

In jedem Schritt wird der Fehler um den Faktor $\frac{\sqrt{2}}{3}$ reduziert.

Iterations-Abbruch

- Iteration sollte abgebrochen werden, wenn die Lösung genau genug bestimmt ist, d.h. wenn

$$|z - x| < \mathrm{tol}\,.$$

Iterations-Abbruch

- Iteration sollte abgebrochen werden, wenn die Lösung genau genug bestimmt ist, d.h. wenn

$$|z - x| < \text{tol}\,.$$

- x im Allgemeinen nicht bekannt, daher Abbruch wenn

$$|z - y| < \text{tol}$$

Iterations-Abbruch

- Iteration sollte abgebrochen werden, wenn die Lösung genau genug bestimmt ist, d.h. wenn

$$|z - x| < \mathrm{tol}\,.$$

- x im Allgemeinen nicht bekannt, daher Abbruch wenn

$$|z - y| < \mathrm{tol} \Rightarrow |z - x| < c \cdot \mathrm{tol}\,.$$

Iterations-Abbruch

- Iteration sollte abgebrochen werden, wenn die Lösung genau genug bestimmt ist, d.h. wenn

$$|z - x| < \mathrm{tol}\,.$$

- x im Allgemeinen nicht bekannt, daher Abbruch wenn

$$|z - y| < \mathrm{tol} \Rightarrow |z - x| < c \cdot \mathrm{tol}\,.$$

  c hängt von Iterationsmatrix ab; $c < 10$, falls Spektralradius $< 9/10$.

MATLAB-Programm für Jacobi-Verfahren

```
function [z,Q,p,error,iter]=jacobi(A,b,ystart,tol,maxiter)

% Ermitteln der Iterationsparameter
  d=diag(A);p=b./d;Q=eye(size(A))-diag(1./d)*A;

% Setzen der Startwerte
z=ystart;error=2*tol;iter=0;

% Iteration durchführen
while ((error > tol) & (iter< maxiter))
  iter=iter+1;
  y=z;
  z=Q*y+p;
  error=norm(z-y);
end
```

Gauß-Seidel-Verfahren

Jacobi-Verfahren

$$
\begin{array}{lcllllllll}
z_1 & = & (b_1 & - & a_{1,2}y_2 & - & a_{1,3}y_3 & - & \cdots & - & a_{1,n}y_n)/a_{1,1} \\
z_2 & = & (b_2 & - & a_{2,1}y_1 & - & a_{2,3}y_3 & - & \cdots & - & a_{2,n}y_n)/a_{2,2} \\
z_3 & = & (b_3 & - & a_{3,1}y_1 & - & a_{3,2}y_2 & - & \cdots & - & a_{3,n}y_n)/a_{3,3} \\
 & & & & \vdots & & & & & & \\
z_n & = & (b_n & - & a_{n,1}y_1 & - & a_{n,2}y_2 & - & \cdots & - & a_{n,n-1}y_{n-1})/a_{n,n}
\end{array}
$$

Gauß-Seidel-Verfahren

Jacobi-Verfahren

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
z_1 & = & (b_1 & - & a_{1,2}y_2 & - & a_{1,3}y_3 & - & \cdots & - & a_{1,n}y_n)/a_{1,1} \\
z_2 & = & (b_2 & - & a_{2,1}y_1 & - & a_{2,3}y_3 & - & \cdots & - & a_{2,n}y_n)/a_{2,2} \\
z_3 & = & (b_3 & - & a_{3,1}y_1 & - & a_{3,2}y_2 & - & \cdots & - & a_{3,n}y_n)/a_{3,3} \\
 & & & & \vdots & & & & & & \\
z_n & = & (b_n & - & a_{n,1}y_1 & - & a_{n,2}y_2 & - & \cdots & - & a_{n,n-1}y_{n-1})/a_{n,n}
\end{array}
$$

Werden beim Jacobi-Verfahren die Koordinaten $z_1, z_2, .., z_n$ der Reihe nach berechnet, so kann bei der Berechnung von z_2 für die erste Koordinate statt dem alten Wert y_1 bereits der neue Wert z_1 verwendet werden.

Gauß-Seidel-Verfahren

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
z_1 & = & (b_1 & - & a_{1,2}y_2 & - & a_{1,3}y_3 & - & \cdots & - & a_{1,n}y_n)/a_{1,1} \\
z_2 & = & (b_2 & - & a_{2,1}z_1 & - & a_{2,3}y_3 & - & \cdots & - & a_{2,n}y_n)/a_{2,2} \\
z_3 & = & (b_3 & - & a_{3,1}y_1 & - & a_{3,2}y_2 & - & \cdots & - & a_{3,n}y_n)/a_{3,3} \\
 & & & & \vdots & & & & & & \\
z_n & = & (b_n & - & a_{n,1}y_1 & - & a_{n,2}y_2 & - & \cdots & - & a_{n,n-1}y_{n-1})/a_{n,n}
\end{array}
$$

Gauß-Seidel-Verfahren

$$\begin{array}{ccccccccccc}
z_1 & = & (b_1 & - & a_{1,2}y_2 & - & a_{1,3}y_3 & - & \cdots & - & a_{1,n}y_n)/a_{1,1} \\
z_2 & = & (b_2 & - & a_{2,1}z_1 & - & a_{2,3}y_3 & - & \cdots & - & a_{2,n}y_n)/a_{2,2} \\
z_3 & = & (b_3 & - & a_{3,1}y_1 & - & a_{3,2}y_2 & - & \cdots & - & a_{3,n}y_n)/a_{3,3} \\
 & & & & \vdots & & & & & & \\
z_n & = & (b_n & - & a_{n,1}y_1 & - & a_{n,2}y_2 & - & \cdots & - & a_{n,n-1}y_{n-1})/a_{n,n}
\end{array}$$

Entsprechend können bei der weiteren Berechnung von Werten immer die bereits bestimmten verwendet werden.

Gauß-Seidel-Verfahren

Gauß-Seidel-Verfahren:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
z_1 & = & (b_1 & - & a_{1,2}y_2 & - & a_{1,3}y_3 & - & \cdots & - & a_{1,n}y_n)/a_{1,1} \\
z_2 & = & (b_2 & - & a_{2,1}z_1 & - & a_{2,3}y_3 & - & \cdots & - & a_{2,n}y_n)/a_{2,2} \\
z_3 & = & (b_3 & - & a_{3,1}z_1 & - & a_{3,2}z_2 & - & \cdots & - & a_{3,n}y_n)/a_{3,3} \\
 & & & & \vdots & & & & & & \\
z_n & = & (b_n & - & a_{n,1}z_1 & - & a_{n,2}z_2 & - & \cdots & - & a_{n,n-1}z_{n-1})/a_{n,n}
\end{array}
$$

Gauß-Seidel-Verfahren

Gauß-Seidel-Verfahren:

$$
\begin{array}{rcccccccccl}
z_1 & = & (b_1 & - & a_{1,2}y_2 & - & a_{1,3}y_3 & - & \cdots & - & a_{1,n}y_n)/a_{1,1} \\
z_2 & = & (b_2 & - & a_{2,1}z_1 & - & a_{2,3}y_3 & - & \cdots & - & a_{2,n}y_n)/a_{2,2} \\
z_3 & = & (b_3 & - & a_{3,1}z_1 & - & a_{3,2}z_2 & - & \cdots & - & a_{3,n}y_n)/a_{3,3} \\
 & & & & \vdots & & & & & & \\
z_n & = & (b_n & - & a_{n,1}z_1 & - & a_{n,2}z_2 & - & \cdots & - & a_{n,n-1}z_{n-1})/a_{n,n}
\end{array}
$$

Teilt man die Matrix A in eine Diagonalmatrix D, eine linke Dreiecksmatrix L und eine rechte Dreiecksmatrix R auf, $A = L + D + R$, so hat die Iterationsmatrix des Gauß-Seidel-Verfahrens die Form $Q = -(L + D)^{-1}R$. Diese Matrix wird aber zur Durchführung der Iteration nicht benötigt.
Das Verfahren ist für parallele oder vektorisierte Berechnung nicht geeignet.

Gauß-Seidel-Verfahren

Gauß-Seidel-Verfahren:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
z_1 & = & (b_1 & - & a_{1,2}y_2 & - & a_{1,3}y_3 & - & \cdots & - & a_{1,n}y_n)/a_{1,1} \\
z_2 & = & (b_2 & - & a_{2,1}z_1 & - & a_{2,3}y_3 & - & \cdots & - & a_{2,n}y_n)/a_{2,2} \\
z_3 & = & (b_3 & - & a_{3,1}z_1 & - & a_{3,2}z_2 & - & \cdots & - & a_{3,n}y_n)/a_{3,3} \\
 & & & & \vdots & & & & & & \\
z_n & = & (b_n & - & a_{n,1}z_1 & - & a_{n,2}z_2 & - & \cdots & - & a_{n,n-1}z_{n-1})/a_{n,n}
\end{array}
$$

Das Gauß-Seidel-Verfahren konvergiert für alle Matrizen A, für die auch das Jacobi-Verfahren konvergiert, insbesondere für strikt diagonaldominante Matrizen.
Außerdem konvergiert es auch für symmetrische Matrizen A, wenn diese nur positive Eigenwerte haben.

Beispiel zum Gauß-Seidel-Verfahren (1/2) - Iteration

Beispiel zum Gauß-Seidel-Verfahren (1/2) - Iteration

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel zum Gauß-Seidel-Verfahren (1/2) - Iteration

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z_1 \quad = \quad (b_1 - a_{1,2} y_2 - a_{1,3} y_3)/a_{1,1}$$

Beispiel zum Gauß-Seidel-Verfahren (1/2) - Iteration

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z_1 = (b_1 - a_{1,2}y_2 - a_{1,3}y_3)/a_{1,1} = (1 - 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0)/3$$

Beispiel zum Gauß-Seidel-Verfahren (1/2) - Iteration

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z_1 = (b_1 - a_{1,2}y_2 - a_{1,3}y_3)/a_{1,1} = (1 - 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0)/3 = 1/3$$

Beispiel zum Gauß-Seidel-Verfahren (1/2) - Iteration

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$z_1 \quad = \quad (b_1 - a_{1,2}y_2 - a_{1,3}y_3)/a_{1,1} = (1 - 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0)/3 = 1/3$$

Beispiel zum Gauß-Seidel-Verfahren (1/2) - Iteration

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= (b_1 - a_{1,2}y_2 - a_{1,3}y_3)/a_{1,1} = (1 - 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0)/3 = 1/3 \\ z_2 &= (b_2 - a_{2,1}z_1 - a_{2,3}y_3)/a_{2,2} \end{aligned}$$

Beispiel zum Gauß-Seidel-Verfahren (1/2) - Iteration

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= (b_1 - a_{1,2}y_2 - a_{1,3}y_3)/a_{1,1} = (1 - 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0)/3 = 1/3 \\ z_2 &= (b_2 - a_{2,1}z_1 - a_{2,3}y_3)/a_{2,2} = (5 - 1 \cdot 1/3 - 1 \cdot 0)/3 \end{aligned}$$

Beispiel zum Gauß-Seidel-Verfahren (1/2) - Iteration

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= (b_1 - a_{1,2}y_2 - a_{1,3}y_3)/a_{1,1} = (1 - 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0)/3 = 1/3 \\ z_2 &= (b_2 - a_{2,1}z_1 - a_{2,3}y_3)/a_{2,2} = (5 - 1 \cdot 1/3 - 1 \cdot 0)/3 = 14/9 \end{aligned}$$

Beispiel zum Gauß-Seidel-Verfahren (1/2) - Iteration

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 14/9 \\ \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= (b_1 - a_{1,2}y_2 - a_{1,3}y_3)/a_{1,1} = (1 - 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0)/3 = 1/3 \\ z_2 &= (b_2 - a_{2,1}z_1 - a_{2,3}y_3)/a_{2,2} = (5 - 1 \cdot 1/3 - 1 \cdot 0)/3 = 14/9 \end{aligned}$$

Beispiel zum Gauß-Seidel-Verfahren (1/2) - Iteration

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 14/9 \\ \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= (b_1 - a_{1,2}y_2 - a_{1,3}y_3)/a_{1,1} = (1 - 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0)/3 = 1/3 \\ z_2 &= (b_2 - a_{2,1}z_1 - a_{2,3}y_3)/a_{2,2} = (5 - 1 \cdot 1/3 - 1 \cdot 0)/3 = 14/9 \\ z_3 &= (b_3 - a_{3,1}z_1 - a_{3,2}z_2)/a_{3,3} \end{aligned}$$

Beispiel zum Gauß-Seidel-Verfahren (1/2) - Iteration

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 14/9 \\ \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= (b_1 - a_{1,2}y_2 - a_{1,3}y_3)/a_{1,1} = (1 - 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0)/3 = 1/3 \\ z_2 &= (b_2 - a_{2,1}z_1 - a_{2,3}y_3)/a_{2,2} = (5 - 1 \cdot 1/3 - 1 \cdot 0)/3 = 14/9 \\ z_3 &= (b_3 - a_{3,1}z_1 - a_{3,2}z_2)/a_{3,3} = (7 - 0 \cdot 1/3 - 1 \cdot 14/9)/3 \end{aligned}$$

Beispiel zum Gauß-Seidel-Verfahren (1/2) - Iteration

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 14/9 \\ \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= (b_1 - a_{1,2}y_2 - a_{1,3}y_3)/a_{1,1} = (1 - 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0)/3 = 1/3 \\ z_2 &= (b_2 - a_{2,1}z_1 - a_{2,3}y_3)/a_{2,2} = (5 - 1 \cdot 1/3 - 1 \cdot 0)/3 = 14/9 \\ z_3 &= (b_3 - a_{3,1}z_1 - a_{3,2}z_2)/a_{3,3} = (7 - 0 \cdot 1/3 - 1 \cdot 14/9)/3 = 49/27 \end{aligned}$$

Beispiel zum Gauß-Seidel-Verfahren (1/2) - Iteration

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 14/9 \\ 49/27 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= (b_1 - a_{1,2}y_2 - a_{1,3}y_3)/a_{1,1} = (1 - 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0)/3 = 1/3 \\ z_2 &= (b_2 - a_{2,1}z_1 - a_{2,3}y_3)/a_{2,2} = (5 - 1 \cdot 1/3 - 1 \cdot 0)/3 = 14/9 \\ z_3 &= (b_3 - a_{3,1}z_1 - a_{3,2}z_2)/a_{3,3} = (7 - 0 \cdot 1/3 - 1 \cdot 14/9)/3 = 49/27 \end{aligned}$$

Beispiel zum Gauß-Seidel-Verfahren (1/2) - Iteration

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 14/9 \\ 49/27 \end{pmatrix} = \tilde{y}$$

Beispiel zum Gauß-Seidel-Verfahren (1/2) - Iteration

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 14/9 \\ 49/27 \end{pmatrix} = \tilde{y}$$

$$\tilde{z}_1 = (b_1 - a_{1,2}\tilde{y}_2 - a_{1,3}\tilde{y}_3)/a_{1,1}$$

Beispiel zum Gauß-Seidel-Verfahren (1/2) - Iteration

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 14/9 \\ 49/27 \end{pmatrix} = \tilde{y}$$

$$\tilde{z}_1 = (b_1 - a_{1,2}\tilde{y}_2 - a_{1,3}\tilde{y}_3)/a_{1,1} = (1 - 1 \cdot 14/9 - 0 \cdot 49/27)/3$$

Beispiel zum Gauß-Seidel-Verfahren (1/2) - Iteration

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 14/9 \\ 49/27 \end{pmatrix} = \tilde{y}$$

$$\tilde{z}_1 = (b_1 - a_{1,2}\tilde{y}_2 - a_{1,3}\tilde{y}_3)/a_{1,1} = (1 - 1 \cdot 14/9 - 0 \cdot 49/27)/3 = -5/27$$

Beispiel zum Gauß-Seidel-Verfahren (1/2) - Iteration

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 14/9 \\ 49/27 \end{pmatrix} = \tilde{y}\,, \tilde{z} = \begin{pmatrix} \quad -5/27 \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$\tilde{z}_1 = (b_1 - a_{1,2}\tilde{y}_2 - a_{1,3}\tilde{y}_3)/a_{1,1} = (1 - 1 \cdot 14/9 - 0 \cdot 49/27)/3 = -5/27$$

Beispiel zum Gauß-Seidel-Verfahren (1/2) - Iteration

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 14/9 \\ 49/27 \end{pmatrix} = \tilde{y}\,, \tilde{z} = \begin{pmatrix} -5/27 \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{z}_1 &= (b_1 - a_{1,2}\tilde{y}_2 - a_{1,3}\tilde{y}_3)/a_{1,1} = (1 - 1 \cdot 14/9 - 0 \cdot 49/27)/3 = -5/27 \\ \tilde{z}_2 &= (5 - 1 \cdot (-5/27) - 1 \cdot 49/27)/3 \end{aligned}$$

Beispiel zum Gauß-Seidel-Verfahren (1/2) - Iteration

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 14/9 \\ 49/27 \end{pmatrix} = \tilde{y}\,, \tilde{z} = \begin{pmatrix} -5/27 \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{z}_1 &= (b_1 - a_{1,2}\tilde{y}_2 - a_{1,3}\tilde{y}_3)/a_{1,1} = (1 - 1 \cdot 14/9 - 0 \cdot 49/27)/3 = -5/27 \\ \tilde{z}_2 &= (5 - 1 \cdot (-5/27) - 1 \cdot 49/27)/3 = 91/81 \end{aligned}$$

Beispiel zum Gauß-Seidel-Verfahren (1/2) - Iteration

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 14/9 \\ 49/27 \end{pmatrix} = \tilde{y}\,, \tilde{z} = \begin{pmatrix} -5/27 \\ 91/81 \\ \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{z}_1 &= (b_1 - a_{1,2}\tilde{y}_2 - a_{1,3}\tilde{y}_3)/a_{1,1} = (1 - 1 \cdot 14/9 - 0 \cdot 49/27)/3 = -5/27 \\ \tilde{z}_2 &= (5 - 1 \cdot (-5/27) - 1 \cdot 49/27)/3 = 91/81 \end{aligned}$$

Beispiel zum Gauß-Seidel-Verfahren (1/2) - Iteration

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 14/9 \\ 49/27 \end{pmatrix} = \tilde{y}\,, \tilde{z} = \begin{pmatrix} -5/27 \\ 91/81 \\ \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{z}_1 &= (b_1 - a_{1,2}\tilde{y}_2 - a_{1,3}\tilde{y}_3)/a_{1,1} = (1 - 1 \cdot 14/9 - 0 \cdot 49/27)/3 = -5/27 \\ \tilde{z}_2 &= (5 - 1 \cdot (-5/27) - 1 \cdot 49/27)/3 = 91/81 \\ \tilde{z}_3 &= (7 - 0 \cdot (-5/27) - 1 \cdot 91/81)/3 \end{aligned}$$

Beispiel zum Gauß-Seidel-Verfahren (1/2) - Iteration

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 14/9 \\ 49/27 \end{pmatrix} = \tilde{y}\,, \tilde{z} = \begin{pmatrix} -5/27 \\ 91/81 \\ \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{z}_1 &= (b_1 - a_{1,2}\tilde{y}_2 - a_{1,3}\tilde{y}_3)/a_{1,1} = (1 - 1 \cdot 14/9 - 0 \cdot 49/27)/3 = -5/27 \\
\tilde{z}_2 &= (5 - 1 \cdot (-5/27) - 1 \cdot 49/27)/3 = 91/81 \\
\tilde{z}_3 &= (7 - 0 \cdot (-5/27) - 1 \cdot 91/81)/3 = 476/243
\end{aligned}$$

Beispiel zum Gauß-Seidel-Verfahren (1/2) - Iteration

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 14/9 \\ 49/27 \end{pmatrix} = \tilde{y}\,, \tilde{z} = \begin{pmatrix} -5/27 \\ 91/81 \\ 476/243 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{z}_1 &= (b_1 - a_{1,2}\tilde{y}_2 - a_{1,3}\tilde{y}_3)/a_{1,1} = (1 - 1 \cdot 14/9 - 0 \cdot 49/27)/3 = -5/27 \\ \tilde{z}_2 &= (5 - 1 \cdot (-5/27) - 1 \cdot 49/27)/3 = 91/81 \\ \tilde{z}_3 &= (7 - 0 \cdot (-5/27) - 1 \cdot 91/81)/3 = 476/243 \end{aligned}$$

Beispiel zum Gauß-Seidel-Verfahren (1/2) - Iteration

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 14/9 \\ 49/27 \end{pmatrix} = \tilde{y}\,, \tilde{z} = \begin{pmatrix} -5/27 \\ 91/81 \\ 476/243 \end{pmatrix} = \tilde{\tilde{y}}$$

Beispiel zum Gauß-Seidel-Verfahren (1/2) - Iteration

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 14/9 \\ 49/27 \end{pmatrix} = \tilde{y}\,, \tilde{z} = \begin{pmatrix} -\,5/27 \\ 91/81 \\ 476/243 \end{pmatrix} = \tilde{\tilde{y}}\,, \tilde{\tilde{z}} = \frac{1}{2187} \begin{pmatrix} -90 \\ 2247 \\ 4354 \end{pmatrix}$$

Beispiel zum Gauß-Seidel-Verfahren (2/2) - Fehlerbetrachtung

$$z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 14/9 \\ 49/27 \end{pmatrix}, \tilde{z} = \begin{pmatrix} -5/27 \\ 91/81 \\ 476/243 \end{pmatrix}, \tilde{\tilde{z}} = \frac{1}{2187} \begin{pmatrix} -90 \\ 2247 \\ 4354 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Beispiel zum Gauß-Seidel-Verfahren (2/2) - Fehlerbetrachtung

$$z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 14/9 \\ 49/27 \end{pmatrix}, \tilde{z} = \begin{pmatrix} -5/27 \\ 91/81 \\ 476/243 \end{pmatrix}, \tilde{\tilde{z}} = \frac{1}{2187} \begin{pmatrix} -90 \\ 2247 \\ 4354 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Fehler der Näherungen:

Beispiel zum Gauß-Seidel-Verfahren (2/2) - Fehlerbetrachtung

$$z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 14/9 \\ 49/27 \end{pmatrix}, \tilde{z} = \begin{pmatrix} -5/27 \\ 91/81 \\ 476/243 \end{pmatrix}, \tilde{\tilde{z}} = \frac{1}{2187} \begin{pmatrix} -90 \\ 2247 \\ 4354 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Fehler der Näherungen:

$$|z - x|$$

Beispiel zum Gauß-Seidel-Verfahren (2/2) - Fehlerbetrachtung

$$z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 14/9 \\ 49/27 \end{pmatrix}, \tilde{z} = \begin{pmatrix} -5/27 \\ 91/81 \\ 476/243 \end{pmatrix}, \tilde{\tilde{z}} = \frac{1}{2187} \begin{pmatrix} -90 \\ 2247 \\ 4354 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Fehler der Näherungen:

$$|z - x| \quad = \quad \sqrt{\frac{81 + 225 + 25}{729}}$$

Beispiel zum Gauß-Seidel-Verfahren (2/2) - Fehlerbetrachtung

$$z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 14/9 \\ 49/27 \end{pmatrix}, \tilde{z} = \begin{pmatrix} -5/27 \\ 91/81 \\ 476/243 \end{pmatrix}, \tilde{\tilde{z}} = \frac{1}{2187} \begin{pmatrix} -90 \\ 2247 \\ 4354 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Fehler der Näherungen:

$$|z - x| = \sqrt{\frac{81 + 225 + 25}{729}} = \sqrt{331/729}$$

Beispiel zum Gauß-Seidel-Verfahren (2/2) - Fehlerbetrachtung

$$z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 14/9 \\ 49/27 \end{pmatrix}, \tilde{z} = \begin{pmatrix} -5/27 \\ 91/81 \\ 476/243 \end{pmatrix}, \tilde{\tilde{z}} = \frac{1}{2187}\begin{pmatrix} -90 \\ 2247 \\ 4354 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Fehler der Näherungen:

$$\begin{aligned} |z - x| &= \sqrt{\frac{81 + 225 + 25}{729}} &= \sqrt{331/729} \\ |\tilde{z} - x| & & \end{aligned}$$

Beispiel zum Gauß-Seidel-Verfahren (2/2) - Fehlerbetrachtung

$$z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 14/9 \\ 49/27 \end{pmatrix}, \tilde{z} = \begin{pmatrix} -5/27 \\ 91/81 \\ 476/243 \end{pmatrix}, \tilde{\tilde{z}} = \frac{1}{2187} \begin{pmatrix} -90 \\ 2247 \\ 4354 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Fehler der Näherungen:

$$\begin{aligned} |z - x| &= \sqrt{\frac{81 + 225 + 25}{729}} = \sqrt{331/729} \\ |\tilde{z} - x| &= \sqrt{\frac{2025 + 900 + 100}{243^2}} \end{aligned}$$

Beispiel zum Gauß-Seidel-Verfahren (2/2) - Fehlerbetrachtung

$$z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 14/9 \\ 49/27 \end{pmatrix}, \tilde{z} = \begin{pmatrix} -5/27 \\ 91/81 \\ 476/243 \end{pmatrix}, \tilde{\tilde{z}} = \frac{1}{2187}\begin{pmatrix} -90 \\ 2247 \\ 4354 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Fehler der Näherungen:

$$\begin{aligned} |z - x| &= \sqrt{\frac{81 + 225 + 25}{729}} &= \sqrt{331/729} \\ |\tilde{z} - x| &= \sqrt{\frac{2025 + 900 + 100}{243^2}} &= 55/243 \end{aligned}$$

Beispiel zum Gauß-Seidel-Verfahren (2/2) - Fehlerbetrachtung

$$z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 14/9 \\ 49/27 \end{pmatrix}, \tilde{z} = \begin{pmatrix} -5/27 \\ 91/81 \\ 476/243 \end{pmatrix}, \tilde{\tilde{z}} = \frac{1}{2187} \begin{pmatrix} -90 \\ 2247 \\ 4354 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Fehler der Näherungen:

$$\begin{aligned} |z - x| &= \sqrt{\frac{81 + 225 + 25}{729}} &&= \sqrt{331/729} \\ |\tilde{z} - x| &= \sqrt{\frac{2025 + 900 + 100}{243^2}} &&= 55/243 \\ |\tilde{\tilde{z}} - x| & \end{aligned}$$

Beispiel zum Gauß-Seidel-Verfahren (2/2) - Fehlerbetrachtung

$$z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 14/9 \\ 49/27 \end{pmatrix}, \tilde{z} = \begin{pmatrix} -5/27 \\ 91/81 \\ 476/243 \end{pmatrix}, \tilde{\tilde{z}} = \frac{1}{2187} \begin{pmatrix} -90 \\ 2247 \\ 4354 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Fehler der Näherungen:

$$\begin{aligned} |z - x| &= \sqrt{\frac{81 + 225 + 25}{729}} &&= \sqrt{331/729} \\ |\tilde{z} - x| &= \sqrt{\frac{2025 + 900 + 100}{243^2}} &&= 55/243 \\ |\tilde{\tilde{z}} - x| &= &&= 110/2187 \end{aligned}$$

Beispiel zum Gauß-Seidel-Verfahren (2/2) - Fehlerbetrachtung

$$z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 14/9 \\ 49/27 \end{pmatrix}, \tilde{z} = \begin{pmatrix} -5/27 \\ 91/81 \\ 476/243 \end{pmatrix}, \tilde{\tilde{z}} = \frac{1}{2187}\begin{pmatrix} -90 \\ 2247 \\ 4354 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Fehler der Näherungen:

$$\begin{aligned} |z - x| &= \sqrt{\frac{81 + 225 + 25}{729}} &&= \sqrt{331/729} \\ |\tilde{z} - x| &= \sqrt{\frac{2025 + 900 + 100}{243^2}} &&= 55/243 \\ |\tilde{\tilde{z}} - x| &= &&= 110/2187 \end{aligned}$$

Von der zweiten zur dritten Näherung wird der Fehler mit dem Faktor 2/9 reduziert. Dies entspricht dem Spektralradius der Iterationsmatrix.

Zusammenfassung

Zusammenfassung

- Lineare Iterationsverfahren dienen der näherungsweisen Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$

Zusammenfassung

- Lineare Iterationsverfahren dienen der näherungsweisen Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$
- Allgemeine Bauart: $y \longrightarrow z = Qy + p$

Zusammenfassung

- Lineare Iterationsverfahren dienen der näherungsweisen Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$
- Allgemeine Bauart: $y \rightarrow z = Qy + p$
- Konvergent, falls größter Betrag der Eigenwerte von $Q < 1$ (Spektralradius)

Zusammenfassung

- Lineare Iterationsverfahren dienen der näherungsweisen Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$
- Allgemeine Bauart: $y \to z = Qy + p$
- Konvergent, falls größter Betrag der Eigenwerte von $Q < 1$ (Spektralradius)
- Jacobi-Verfahren: $Q = E - D^{-1}A$, konvergent für strikt diagonaldominante Matrizen A

Zusammenfassung

- Lineare Iterationsverfahren dienen der näherungsweisen Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$
- Allgemeine Bauart: $y \rightarrow z = Qy + p$
- Konvergent, falls größter Betrag der Eigenwerte von $Q < 1$ (Spektralradius)
- Jacobi-Verfahren: $Q = E - D^{-1}A$, konvergent für strikt diagonaldominante Matrizen A
- Gauß-Seidel-Verfahren: $Q = -(L + D)^{-1}R$, konvergent für strikt diagonaldominante Matrizen A und für symmetrische Matrizen mit nur positiven Eigenwerten

Aufgabe 1

Geben Sie für das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 10 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 24 \\ 12 \end{pmatrix}$$

die Matrix Q und den Vektor p der Jacobi-Iteration in der Form

$$z = Qy + p$$

an.
Führen Sie ausgehend vom Startvektor $y = (15, 6, 15, 30)^{\mathrm{t}}$ zwei Iterationsschritte durch.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1

Die Iterationsmatrix des Jacobi-Verfahrens ist

$$Q = E - D^{-1}A = -D^{-1}(L + R)$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1

Die Iterationsmatrix des Jacobi-Verfahrens ist

$$Q = E - D^{-1}A = -D^{-1}(L + R)$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1

Die Iterationsmatrix des Jacobi-Verfahrens ist

$$Q = E - D^{-1}A = -D^{-1}(L+R) = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 0 & -10 & 10 & 5 \\ -6 & 0 & 6 & -3 \\ 10 & -10 & 0 & -5 \\ 0 & 15 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1

Die Iterationsmatrix des Jacobi-Verfahrens ist

$$Q = E - D^{-1}A = -D^{-1}(L+R) = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 0 & -10 & 10 & 5 \\ -6 & 0 & 6 & -3 \\ 10 & -10 & 0 & -5 \\ 0 & 15 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und der Vektor $p = D^{-1}b = (0, 2, 4, 3)^{\mathrm{t}}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1

Die Iterationsmatrix des Jacobi-Verfahrens ist

$$Q = E - D^{-1}A = -D^{-1}(L+R) = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 0 & -10 & 10 & 5 \\ -6 & 0 & 6 & -3 \\ 10 & -10 & 0 & -5 \\ 0 & 15 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und der Vektor $p = D^{-1}b = (0,2,4,3)^{\mathrm{t}}$. Erster Iterationsschritt

$$z = Qy + p$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1

Die Iterationsmatrix des Jacobi-Verfahrens ist

$$Q = E - D^{-1}A = -D^{-1}(L+R) = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 0 & -10 & 10 & 5 \\ -6 & 0 & 6 & -3 \\ 10 & -10 & 0 & -5 \\ 0 & 15 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und der Vektor $p = D^{-1}b = (0,2,4,3)^{\mathrm{t}}$. Erster Iterationsschritt

$$z \quad = \quad Qy + p = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 0-60+150+150 \\ -90+0+90-90 \\ 150-60+0-150 \\ 0+90+0+0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(2)

Zweiter Iterationsschritt

$$\tilde{z} = Qz + p$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(2)

Zweiter Iterationsschritt

$$\tilde{z} = Qz + p$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(2)

Zweiter Iterationsschritt

$$\tilde{z} = Qz + p = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 0 & -10 & 10 & 5 \\ -6 & 0 & 6 & -3 \\ 10 & -10 & 0 & -5 \\ 0 & 15 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(2)

Zweiter Iterationsschritt

$$\begin{aligned}
\tilde{z} &= Qz + p = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 0 & -10 & 10 & 5 \\ -6 & 0 & 6 & -3 \\ 10 & -10 & 0 & -5 \\ 0 & 15 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 0+10+20+30 \\ -48+0+12-18 \\ 80+10+0-30 \\ 0-15+0+0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/5 \\ 6 \\ 5/2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie für die vom reellen Parameter t abhängige Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & t \\ t & 1/2 \end{pmatrix}$$

die Iterationsmatrix des Jacobi-Verfahrens und geben Sie an, für welche Parameter t das Jacobi-Verfahren konvergiert.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & t \\ t & 1/2 \end{pmatrix}$$

Iterationsmatrix des Jacobi-Verfahrens

$$Q = E - D^{-1}A$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & t \\ t & 1/2 \end{pmatrix}$$

Iterationsmatrix des Jacobi-Verfahrens

$$Q = E - D^{-1}A$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & t \\ t & 1/2 \end{pmatrix}$$

Iterationsmatrix des Jacobi-Verfahrens

$$\begin{aligned} Q &= E - D^{-1}A \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & t \\ t & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -t/2 \\ -2t & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & t \\ t & 1/2 \end{pmatrix}$$

Iterationsmatrix des Jacobi-Verfahrens

$$\begin{aligned} Q &= E - D^{-1}A \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & t \\ t & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -t/2 \\ -2t & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Hinreichend für Konvergenz: A strikt diagonaldominant

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & t \\ t & 1/2 \end{pmatrix}$$

Iterationsmatrix des Jacobi-Verfahrens

$$\begin{aligned} Q &= E - D^{-1}A \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & t \\ t & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -t/2 \\ -2t & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Hinreichend für Konvergenz: A strikt diagonaldominant $\Rightarrow |t| < 1/2$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & t \\ t & 1/2 \end{pmatrix}$$

Iterationsmatrix des Jacobi-Verfahrens

$$\begin{aligned} Q &= E - D^{-1}A \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & t \\ t & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -t/2 \\ -2t & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Hinreichend für Konvergenz: A strikt diagonaldominant $\Rightarrow |t| < 1/2$
Charakteristisches Polynom von Q:

$$(-\lambda)^2 - (-t/2)(-2t) = \lambda^2 - t^2$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & t \\ t & 1/2 \end{pmatrix}$$

Iterationsmatrix des Jacobi-Verfahrens

$$\begin{aligned} Q &= E - D^{-1}A \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & t \\ t & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -t/2 \\ -2t & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Hinreichend für Konvergenz: A strikt diagonaldominant $\Rightarrow |t| < 1/2$
Charakteristisches Polynom von Q:

$$(-\lambda)^2 - (-t/2)(-2t) = \lambda^2 - t^2$$

Nullstellen $\pm t$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & t \\ t & 1/2 \end{pmatrix}$$

Iterationsmatrix des Jacobi-Verfahrens

$$\begin{aligned} Q &= E - D^{-1}A \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & t \\ t & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -t/2 \\ -2t & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Hinreichend für Konvergenz: A strikt diagonaldominant $\Rightarrow |t| < 1/2$
Charakteristisches Polynom von Q:

$$(-\lambda)^2 - (-t/2)(-2t) = \lambda^2 - t^2$$

Nullstellen $\pm t \Rightarrow \varrho(Q) = |t|$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & t \\ t & 1/2 \end{pmatrix}$$

Iterationsmatrix des Jacobi-Verfahrens

$$\begin{aligned} Q &= E - D^{-1}A \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & t \\ t & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -t/2 \\ -2t & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Hinreichend für Konvergenz: A strikt diagonaldominant $\Rightarrow |t| < 1/2$
Charakteristisches Polynom von Q:

$$(-\lambda)^2 - (-t/2)(-2t) = \lambda^2 - t^2$$

Nullstellen $\pm t \Rightarrow \varrho(Q) = |t| < 1$ für Konvergenz.

Aufgabe 3

Führen Sie für das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ausgehend vom Startvektor $y = (1, 1, 1, 1)^{\mathrm{t}}$ einen Schritt der Gauß-Seidel Iteration durch.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3

Gauß-Seidel Verfahren:

$$z_k = (b_k - a_{k,1}z_1 - \cdots - a_{k,k-1}z_{k-1} - a_{k,k+1}y_{k+1} - \cdots - a_{k,n}y_n)/a_{k,k}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3

Gauß-Seidel Verfahren:

$$z_k = (b_k - a_{k,1}z_1 - \cdots - a_{k,k-1}z_{k-1} - a_{k,k+1}y_{k+1} - \cdots - a_{k,n}y_n)/a_{k,k}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3

Gauß-Seidel Verfahren:

$$z_k = (b_k - a_{k,1}z_1 - \cdots - a_{k,k-1}z_{k-1} - a_{k,k+1}y_{k+1} - \cdots - a_{k,n}y_n)/a_{k,k}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ein Schritt:
$z_1 = (b_1 - a_{1,2}y_2 - a_{1,3}y_3 - a_{1,4}y_4)/a_{1,1} = (4 - 3 - 2 - 1)/4 = -1/2$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3

Gauß-Seidel Verfahren:

$$z_k = (b_k - a_{k,1}z_1 - \cdots - a_{k,k-1}z_{k-1} - a_{k,k+1}y_{k+1} - \cdots - a_{k,n}y_n)/a_{k,k}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ein Schritt:

$$z_1 = (b_1 - a_{1,2}y_2 - a_{1,3}y_3 - a_{1,4}y_4)/a_{1,1} = (4-3-2-1)/4 = -1/2$$
$$z_2 = (b_2 - a_{2,1}z_1 - a_{2,3}y_3 - a_{2,4}y_4)/a_{2,2} = (3+3/2-2-1)/3 = 1/2$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3

Gauß-Seidel Verfahren:

$$z_k = (b_k - a_{k,1}z_1 - \cdots - a_{k,k-1}z_{k-1} - a_{k,k+1}y_{k+1} - \cdots - a_{k,n}y_n)/a_{k,k}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ein Schritt:

$z_1 = (b_1 - a_{1,2}y_2 - a_{1,3}y_3 - a_{1,4}y_4)/a_{1,1} = (4 - 3 - 2 - 1)/4 = -1/2$
$z_2 = (b_2 - a_{2,1}z_1 - a_{2,3}y_3 - a_{2,4}y_4)/a_{2,2} = (3 + 3/2 - 2 - 1)/3 = 1/2$
$z_3 = (b_3 - a_{3,1}z_1 - a_{3,2}z_2 - a_{3,4}y_4)/a_{3,3} = (2 + 2/2 - 2/2 - 1)/2 = 1/2$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3

Gauß-Seidel Verfahren:

$$z_k = (b_k - a_{k,1}z_1 - \cdots - a_{k,k-1}z_{k-1} - a_{k,k+1}y_{k+1} - \cdots - a_{k,n}y_n)/a_{k,k}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ein Schritt:

$$z_1 = (b_1 - a_{1,2}y_2 - a_{1,3}y_3 - a_{1,4}y_4)/a_{1,1} = (4-3-2-1)/4 = -1/2$$
$$z_2 = (b_2 - a_{2,1}z_1 - a_{2,3}y_3 - a_{2,4}y_4)/a_{2,2} = (3+3/2-2-1)/3 = 1/2$$
$$z_3 = (b_3 - a_{3,1}z_1 - a_{3,2}z_2 - a_{3,4}y_4)/a_{3,3} = (2+2/2-2/2-1)/2 = 1/2$$
$$z_4 = (b_4 - a_{4,1}z_1 - a_{4,2}z_2 - a_{4,3}z_3)/a_{4,4} = (1+1/2-1/2-1/2) = 1/2$$

Aufgabe 4

Implementieren Sie das Gauß-Seidel-Verfahren in MATLAB

Aufgabe 4

Implementieren Sie das Gauß-Seidel-Verfahren in MATLAB

- Gehen Sie vom Programm `jacobi` aus

Aufgabe 4

Implementieren Sie das Gauß-Seidel-Verfahren in MATLAB

- Gehen Sie vom Programm `jacobi` aus
- Ersetzen Sie die Zeile, in der $z = Qy + p$ berechnet wird, durch eine Schleife, bei der die Elemente von z der Reihe nach bestimmt werden.

Aufgabe 4

Implementieren Sie das Gauß-Seidel-Verfahren in MATLAB

- Gehen Sie vom Programm `jacobi` aus
- Ersetzen Sie die Zeile, in der $z = Qy + p$ berechnet wird, durch eine Schleife, bei der die Elemente von z der Reihe nach bestimmt werden.
- Ersetzen Sie dann auf der rechten Seite y durch z

Aufgabe 4

Implementieren Sie das Gauß-Seidel-Verfahren in MATLAB

- Gehen Sie vom Programm `jacobi` aus
- Ersetzen Sie die Zeile, in der $z = Qy + p$ berechnet wird, durch eine Schleife, bei der die Elemente von z der Reihe nach bestimmt werden.
- Ersetzen Sie dann auf der rechten Seite y durch z
- Versuchen Sie auf die Hilfsgrößen Q und p zu verzichten und statt dessen die Daten von A und b zu verwenden.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4

Gehen Sie vom Programm Jacobi aus

```
function [z,Q,p,error,iter]=jacobi(A,b,ystart,tol,maxiter)

% Ermitteln der Iterationsparameter
  d=diag(A);p=b./d;Q=eye(size(A))-diag(1./d)*A;

% Setzen der Startwerte
z=ystart;error=2*tol;iter=0;

% Iteration durchführen
while ((error > tol) & (iter< maxiter))
  iter=iter+1;
  y=z;
  z=Q*y+p;
  error=norm(z-y);
end
```

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4

Ersetzen Sie die Zeile in der $z = Qy + p$ berechnet wird durch eine Schleife, bei der die Elemente von z der Reihe nach bestimmt werden.

```
function [z,error,iter]=jacobi(A,b,ystart,tol,maxiter)

% Ermitteln der Iterationsparameter
d=diag(A);p=b./d;Q=eye(size(A))-diag(1./d)*A;n=size(A,1);

% Setzen der Startwerte
z=ystart;error=2*tol;iter=0;

% Iteration durchführen
while ((error > tol) & (iter< maxiter))
  iter=iter+1;
  y=z;
  for k=1:n, z(k)=Q(k,:)*y+p(k); end
  error=norm(z-y);
end
```

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4

Ersetzen Sie dann auf der rechten Seite y durch z

```
function [z,error,iter]=gauss_seidel(A,b,ystart,tol,maxiter)

% Ermitteln der Iterationsparameter
d=diag(A);p=b./d;Q=eye(size(A))-diag(1./d)*A;n=size(A,1);

% Setzen der Startwerte
z=ystart;error=2*tol;iter=0;

% Iteration durchführen
while ((error > tol) & (iter< maxiter))
  iter=iter+1;
  y=z;
  for k=1:n, z(k)=Q(k,:)*z+p(k); end
  error=norm(z-y);
end
```

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4

Versuchen Sie auf die Hilfsgrößen Q und p zu verzichten und statt dessen die Daten von A und b zu verwenden.

```
function [z,error,iter]=gauss_seidel(A,b,ystart,tol,maxiter)

% Größe des Problems
n=size(A,1);

% Setzen der Startwerte
z=ystart;error=2*tol;iter=0;

% Iteration durchführen
while ((error > tol) & (iter< maxiter))
  iter=iter+1;
  y=z;
  for k=1:n, z(k)=z(k)+(b(k)-A(k,:)*z)/A(k,k); end
  error=norm(z-y);
end
```

Ausgleichsprobleme

Problemstellung

Problemstellung

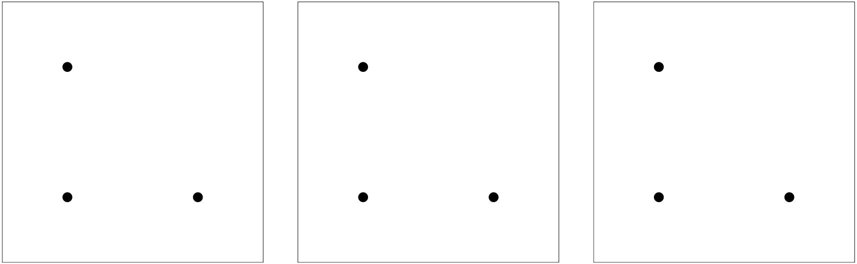
- Aufgabe: finde zu gegebenen Punkten $P_k = (x_k, y_k)$ (z.B. Meßwerte) die Gerade g, die diesen „am Nächsten kommt“.

Problemstellung

- Aufgabe: finde zu gegebenen Punkten $P_k = (x_k, y_k)$ (z.B. Meßwerte) die Gerade g, die diesen „am Nächsten kommt“.
- Frage: Was heißt „am Nächsten kommen“?

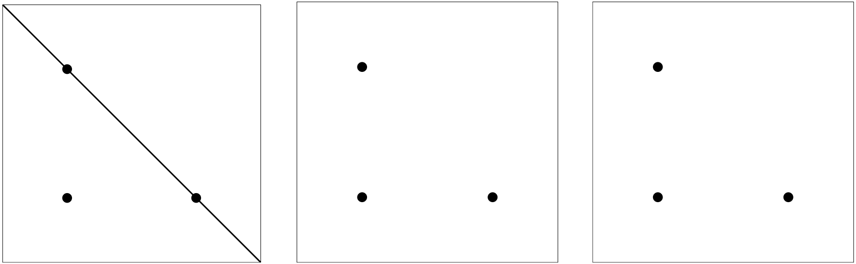
Problemstellung

- Aufgabe: finde zu gegebenen Punkten $P_k = (x_k, y_k)$ (z.B. Meßwerte) die Gerade g, die diesen „am Nächsten kommt“.
- Frage: Was heißt „am Nächsten kommen“?
  Beispiel: Punkte $(0,0), (1,0), (0,1)$



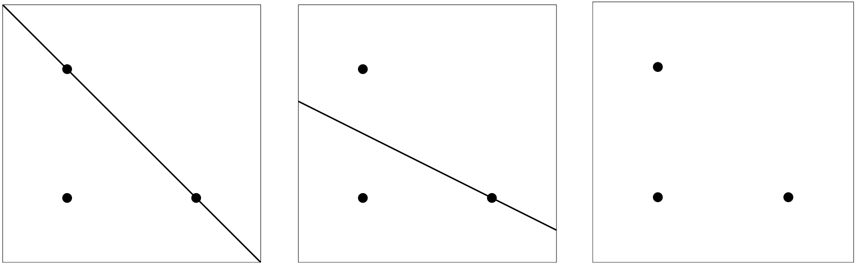
Problemstellung

- Aufgabe: finde zu gegebenen Punkten $P_k = (x_k, y_k)$ (z.B. Meßwerte) die Gerade g, die diesen „am Nächsten kommt".
- Frage: Was heißt „am Nächsten kommen"?
  Beispiel: Punkte $(0,0), (1,0), (0,1)$



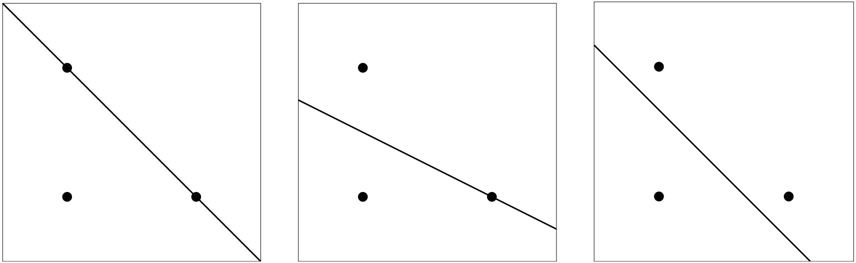
Problemstellung

- Aufgabe: finde zu gegebenen Punkten $P_k = (x_k, y_k)$ (z.B. Meßwerte) die Gerade g, die diesen „am Nächsten kommt“.
- Frage: Was heißt „am Nächsten kommen“?
  Beispiel: Punkte $(0,0), (1,0), (0,1)$



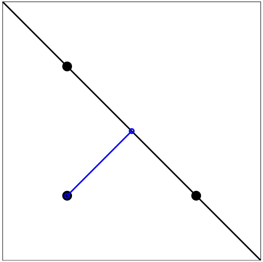
Problemstellung

- Aufgabe: finde zu gegebenen Punkten $P_k = (x_k, y_k)$ (z.B. Meßwerte) die Gerade g, die diesen „am Nächsten kommt“.
- Frage: Was heißt „am Nächsten kommen“?
  Beispiel: Punkte $(0,0), (1,0), (0,1)$

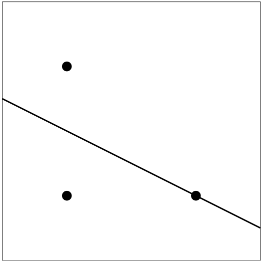


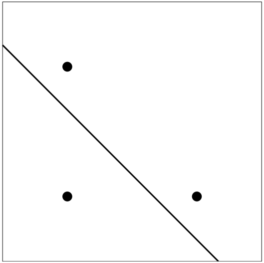
Problemstellung

- Aufgabe: finde zu gegebenen Punkten $P_k = (x_k, y_k)$ (z.B. Meßwerte) die Gerade g, die diesen „am Nächsten kommt".
- Frage: Was heißt „am Nächsten kommen"?
  Beispiel: Punkte $(0,0),(1,0),(0,1)$



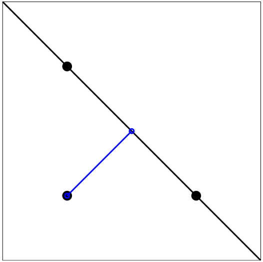
Abstandsumme
$\sum_k \operatorname{dist}(P_k, g)$



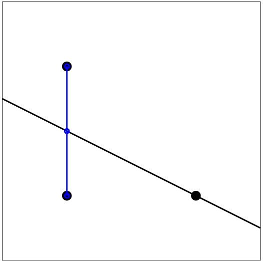


Problemstellung

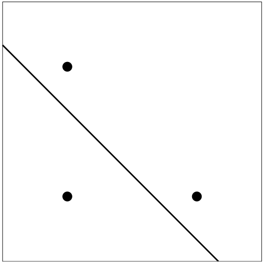
- Aufgabe: finde zu gegebenen Punkten $P_k = (x_k, y_k)$ (z.B. Meßwerte) die Gerade g, die diesen „am Nächsten kommt“.
- Frage: Was heißt „am Nächsten kommen“?
  Beispiel: Punkte $(0,0), (1,0), (0,1)$



Abstandsumme
$$\sum_k \mathrm{dist}(P_k, g)$$

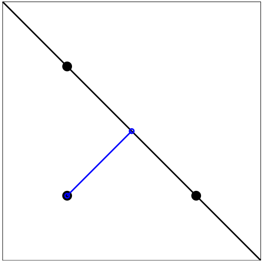


Fehlerquadrate
$$\sum_k (f(x_k) - y_k)^2$$
$$f(x) = ux + v$$

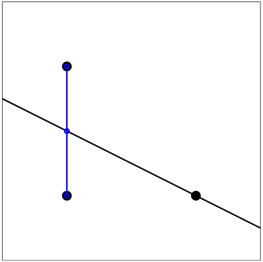


Problemstellung

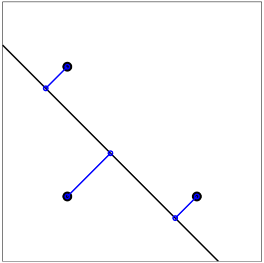
- Aufgabe: finde zu gegebenen Punkten $P_k = (x_k, y_k)$ (z.B. Meßwerte) die Gerade g, die diesen „am Nächsten kommt“.
- Frage: Was heißt „am Nächsten kommen“?
  Beispiel: Punkte $(0,0), (1,0), (0,1)$



Abstandsumme
$$\sum_k \mathrm{dist}(P_k, g)$$



Fehlerquadrate
$$\sum_k (f(x_k) - y_k)^2$$
$$f(x) = ux + v$$



Abstandsquadrate
$$\sum_k (\mathrm{dist}(P_k, g))^2$$

Methode der kleinsten Fehlerquadrate (Gauß)

Methode der kleinsten Fehlerquadrate (Gauß)

- Ansatz für Gerade: $y = f(x) = ux + v$

Methode der kleinsten Fehlerquadrate (Gauß)

- Ansatz für Gerade: $y = f(x) = ux + v$
- Parameter u und v so bestimmen, dass $\sum_k (f(x_k) - y_k)^2$ minimal wird.

Methode der kleinsten Fehlerquadrate (Gauß)

- Ansatz für Gerade: $y = f(x) = ux + v$
- Parameter u und v so bestimmen, dass $\sum_k (f(x_k) - y_k)^2$ minimal wird.

$$\sum_k (f(x_k) - y_k)^2$$

Methode der kleinsten Fehlerquadrate (Gauß)

- Ansatz für Gerade: $y = f(x) = ux + v$
- Parameter u und v so bestimmen, dass $\sum_k (f(x_k) - y_k)^2$ minimal wird.

$$
\begin{aligned}
& \sum_k (f(x_k) - y_k)^2 \\
= \quad & (f(x_1) - y_1)^2 + (f(x_2) - y_2)^2 + \cdots + (f(x_n) - y_n)^2
\end{aligned}
$$

Methode der kleinsten Fehlerquadrate (Gauß)

- Ansatz für Gerade: $y = f(x) = ux + v$
- Parameter u und v so bestimmen, dass $\sum_k (f(x_k) - y_k)^2$ minimal wird.

$$
\begin{aligned}
& \sum_k (f(x_k) - y_k)^2 \\
= \; & (f(x_1) - y_1)^2 + (f(x_2) - y_2)^2 + \cdots + (f(x_n) - y_n)^2 \\
= \; & (ux_1 + v - y_1)^2
\end{aligned}
$$

Methode der kleinsten Fehlerquadrate (Gauß)

- Ansatz für Gerade: $y = f(x) = ux + v$
- Parameter u und v so bestimmen, dass $\sum_k (f(x_k) - y_k)^2$ minimal wird.

$$
\begin{aligned}
& \sum_k (f(x_k) - y_k)^2 \\
= \;& (f(x_1) - y_1)^2 + (f(x_2) - y_2)^2 + \cdots + (f(x_n) - y_n)^2 \\
= \;& (ux_1 + v - y_1)^2 + (ux_2 + v - y_2)^2
\end{aligned}
$$

Methode der kleinsten Fehlerquadrate (Gauß)

- Ansatz für Gerade: $y = f(x) = ux + v$
- Parameter u und v so bestimmen, dass $\sum_k (f(x_k) - y_k)^2$ minimal wird.

$$
\begin{aligned}
& \sum_k (f(x_k) - y_k)^2 \\
= \quad & (f(x_1) - y_1)^2 + (f(x_2) - y_2)^2 + \cdots + (f(x_n) - y_n)^2 \\
= \quad & (ux_1 + v - y_1)^2 + (ux_2 + v - y_2)^2 + \cdots + (ux_n + v - y_n)^2
\end{aligned}
$$

Methode der kleinsten Fehlerquadrate (Gauß)

- Ansatz für Gerade: $y = f(x) = ux + v$
- Parameter u und v so bestimmen, dass $\sum_k (f(x_k) - y_k)^2$ minimal wird.

$$\begin{aligned}
& \sum_k (f(x_k) - y_k)^2 \\
= \quad & (f(x_1) - y_1)^2 + (f(x_2) - y_2)^2 + \cdots + (f(x_n) - y_n)^2 \\
= \quad & (ux_1 + v - y_1)^2 + (ux_2 + v - y_2)^2 + \cdots + (ux_n + v - y_n)^2
\end{aligned}$$

$$u \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Methode der kleinsten Fehlerquadrate (Gauß)

- Ansatz für Gerade: $y = f(x) = ux + v$
- Parameter u und v so bestimmen, dass $\sum_k (f(x_k) - y_k)^2$ minimal wird.

$$
\begin{aligned}
& \sum_k (f(x_k) - y_k)^2 \\
= \;& (f(x_1) - y_1)^2 + (f(x_2) - y_2)^2 + \cdots + (f(x_n) - y_n)^2 \\
= \;& (ux_1 + v - y_1)^2 + (ux_2 + v - y_2)^2 + \cdots + (ux_n + v - y_n)^2
\end{aligned}
$$

$$
u \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Methode der kleinsten Fehlerquadrate (Gauß)

- Ansatz für Gerade: $y = f(x) = ux + v$
- Parameter u und v so bestimmen, dass $\sum_k (f(x_k) - y_k)^2$ minimal wird.

$$
\begin{aligned}
& \sum_k (f(x_k) - y_k)^2 \\
= \; & (f(x_1) - y_1)^2 + (f(x_2) - y_2)^2 + \cdots + (f(x_n) - y_n)^2 \\
= \; & (ux_1 + v - y_1)^2 + (ux_2 + v - y_2)^2 + \cdots + (ux_n + v - y_n)^2
\end{aligned}
$$

$$
u \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}
$$

Methode der kleinsten Fehlerquadrate (Gauß)

- Ansatz für Gerade: $y = f(x) = ux + v$
- Parameter u und v so bestimmen, dass $\sum_k (f(x_k) - y_k)^2$ minimal wird.

$$
\begin{aligned}
& \sum_k (f(x_k) - y_k)^2 \\
= \quad & (f(x_1) - y_1)^2 + (f(x_2) - y_2)^2 + \cdots + (f(x_n) - y_n)^2 \\
= \quad & (ux_1 + v - y_1)^2 + (ux_2 + v - y_2)^2 + \cdots + (ux_n + v - y_n)^2
\end{aligned}
$$

$$
= \left| u \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right|^2
$$

Methode der kleinsten Fehlerquadrate (Gauß)

- Ansatz für Gerade: $y = f(x) = ux + v$
- Parameter u und v so bestimmen, dass $\sum_k (f(x_k) - y_k)^2$ minimal wird.

$$
\begin{aligned}
& \sum_k (f(x_k) - y_k)^2 \\
= \;& (f(x_1) - y_1)^2 + (f(x_2) - y_2)^2 + \cdots + (f(x_n) - y_n)^2 \\
= \;& (ux_1 + v - y_1)^2 + (ux_2 + v - y_2)^2 + \cdots + (ux_n + v - y_n)^2
\end{aligned}
$$

$$
= \left| u \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right|^2 = \left| \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}_{w} - \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{b} \right|^2
$$

(lineares) Ausgleichsproblem

(lineares) Ausgleichsproblem

- Ausgangspunkt: Überbestimmtes Gleichungssystem $Aw = b$

(lineares) Ausgleichsproblem

- Ausgangspunkt: Überbestimmtes Gleichungssystem $Aw = b$
- Gesucht: Lösung bei der die Norm des Residuums $|Aw - b|$ minimal wird. (Damit ist auch $|Aw - b|^2$ minimal.)

(lineares) Ausgleichsproblem

- Ausgangspunkt: Überbestimmtes Gleichungssystem $Aw = b$
- Gesucht: Lösung bei der die Norm des Residuums $|Aw - b|$ minimal wird. (Damit ist auch $|Aw - b|^2$ minimal.)
- Lösungsmethode: Normalengleichungen

$$A^{\mathrm{t}}Aw = A^{\mathrm{t}}b \Rightarrow |Aw - b| \text{ ist minimal}$$

(lineares) Ausgleichsproblem

- Ausgangspunkt: Überbestimmtes Gleichungssystem $Aw = b$
- Gesucht: Lösung bei der die Norm des Residuums $|Aw - b|$ minimal wird. (Damit ist auch $|Aw - b|^2$ minimal.)
- Lösungsmethode: Normalengleichungen

$$A^{\mathrm{t}}Aw = A^{\mathrm{t}}b \Rightarrow |Aw - b| \text{ ist minimal}$$

- $A^{\mathrm{t}}A$ ist symmetrisch und hat nur reelle Eigenwerte, die nicht negativ sind.

Ausgleichsgerade

Ausgleichsgerade

$$A^{\mathrm{t}} A w = A^{\mathrm{t}} b$$

Ausgleichsgerade

$$
\begin{array}{ccc}
A^{\mathrm{t}}Aw & = & A^{\mathrm{t}}b \\
\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Ausgleichsgerade

$$
\begin{aligned}
A^t A w &= A^t b \\
\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Ausgleichsgerade

$$A^{\mathrm{t}}Aw = A^{\mathrm{t}}b$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sum x_k^2 & \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

Ausgleichsgerade

$$A^t A w = A^t b$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sum x_k^2 & \sum x_k \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

Ausgleichsgerade

$$A^{t}Aw = A^{t}b$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sum x_k^2 & \sum x_k \\ \sum x_k & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

Ausgleichsgerade

$$
\begin{aligned}
A^{\mathrm{t}} A w &= A^{\mathrm{t}} b \\
\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \sum x_k^2 & \sum x_k \\ \sum x_k & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \quad & \quad \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Ausgleichsgerade

$$
\begin{aligned}
A^t A w &= A^t b \\
\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}
&= \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \sum x_k^2 & \sum x_k \\ \sum x_k & n \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}
&= \begin{pmatrix} \sum(x_k y_k) \\ \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Ausgleichsgerade

$$
\begin{aligned}
A^t A w &= A^t b \\
\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \sum x_k^2 & \sum x_k \\ \sum x_k & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sum (x_k y_k) \\ \sum y_k \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Ausgleichsgerade

$$
\begin{aligned}
A^{t}Aw &= A^{t}b \\
\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \sum x_k^2 & \sum x_k \\ \sum x_k & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sum (x_k y_k) \\ \sum y_k \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Ausgleichsgerade

$$
\begin{aligned}
A^{\mathrm{t}}Aw &= A^{\mathrm{t}}b \\
\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}
&= \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \sum x_k^2 & \sum x_k \\ \sum x_k & n \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}
&= \begin{pmatrix} \sum (x_k y_k) \\ \sum y_k \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Lösung: (Falls mindestens zwei x_k unterschiedlich.)

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{n \sum (x_k y_k) - (\sum x_k)(\sum y_k)}{n \sum x_k^2 - (\sum x_k)^2} \\
v &= \frac{(\sum x_k^2)(\sum y_k) - (\sum x_k) \sum (x_k y_k)}{n \sum x_k^2 - (\sum x_k)^2}
\end{aligned}
$$

Ausgleichsgerade

$$
\begin{aligned}
A^{\mathrm t}Aw &= A^{\mathrm t}b \\
\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}
&= \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \sum x_k^2 & \sum x_k \\ \sum x_k & n \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}
&= \begin{pmatrix} \sum (x_k y_k) \\ \sum y_k \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Lösung: (Falls mindestens zwei x_k unterschiedlich.)

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{n\sum(x_k y_k) - (\sum x_k)(\sum y_k)}{n\sum x_k^2 - (\sum x_k)^2} \\
v &= \frac{(\sum x_k^2)(\sum y_k) - (\sum x_k)\sum(x_k y_k)}{n\sum x_k^2 - (\sum x_k)^2}
\end{aligned}
$$

Falls alle x_k gleich sind, ist $u = 0, v = \sum y_k / n$ eine mögliche Lösung.

Beispiel zur Ausgleichsgerade

Punkte: $P_1 = (0, 0)\,, \quad P_2 = (1, 0)\,, \quad P_3 = (0, 1)\,, \quad n = 3$

Beispiel zur Ausgleichsgerade

Punkte: $P_1 = (0,0)\,, \quad P_2 = (1,0)\,, \quad P_3 = (0,1)\,, \quad n = 3$

$$x_1 = 0\,, \quad x_2 = 1\,, \quad x_3 = 0$$

Beispiel zur Ausgleichsgerade

Punkte: $P_1 = (0,0)\,, \quad P_2 = (1,0)\,, \quad P_3 = (0,1)\,, \quad n = 3$

$$x_1 = 0\,, \quad x_2 = 1\,, \quad x_3 = 0$$

$$\sum x_k$$

Beispiel zur Ausgleichsgerade

Punkte: $P_1 = (0,0)\,, \quad P_2 = (1,0)\,, \quad P_3 = (0,1)\,, \quad n = 3$

$$x_1 = 0\,, \quad x_2 = 1\,, \quad x_3 = 0$$

$$\sum x_k = 0 + 1 + 0$$

Beispiel zur Ausgleichsgerade

Punkte: $P_1 = (0,0)\,, \quad P_2 = (1,0)\,, \quad P_3 = (0,1)\,, \quad n = 3$

$$x_1 = 0\,, \quad x_2 = 1\,, \quad x_3 = 0$$

$$\sum x_k \;=\; 0 + 1 + 0 = 1$$

Beispiel zur Ausgleichsgerade

Punkte: $P_1 = (0,0)\,, \quad P_2 = (1,0)\,, \quad P_3 = (0,1)\,, \quad n = 3$

$$x_1 = 0\,, \quad x_2 = 1\,, \quad x_3 = 0$$

$$\sum x_k \;=\; 0 + 1 + 0 = 1\,, \quad \sum x_k^2$$

Beispiel zur Ausgleichsgerade

Punkte: $P_1 = (0,0)\,, \quad P_2 = (1,0)\,, \quad P_3 = (0,1)\,, \quad n = 3$

$$x_1 = 0\,, \quad x_2 = 1\,, \quad x_3 = 0$$

$$\sum x_k \;=\; 0 + 1 + 0 = 1\,, \quad \sum x_k^2 = 0^2 + 1^2 + 0^2$$

Beispiel zur Ausgleichsgerade

Punkte: $P_1 = (0,0)\,, \quad P_2 = (1,0)\,, \quad P_3 = (0,1)\,, \quad n = 3$

$$x_1 = 0\,, \quad x_2 = 1\,, \quad x_3 = 0$$

$$\sum x_k \;=\; 0 + 1 + 0 = 1\,, \quad \sum x_k^2 = 0^2 + 1^2 + 0^2 = 1$$

Beispiel zur Ausgleichsgerade

Punkte: $P_1 = (0,0)\,, \quad P_2 = (1,0)\,, \quad P_3 = (0,1)\,, \quad n = 3$

$$
\begin{aligned}
& x_1 = 0\,, \quad x_2 = 1\,, \quad x_3 = 0 \\
\sum x_k \;=\; & 0 + 1 + 0 = 1\,, \quad \sum x_k^2 = 0^2 + 1^2 + 0^2 = 1 \\
& y_1 = 0\,, \quad y_2 = 0\,, \quad y_3 = 1
\end{aligned}
$$

Beispiel zur Ausgleichsgerade

Punkte: $P_1 = (0,0)\,, \quad P_2 = (1,0)\,, \quad P_3 = (0,1)\,, \quad n = 3$

$$x_1 = 0\,, \quad x_2 = 1\,, \quad x_3 = 0$$

$$\sum x_k \;=\; 0 + 1 + 0 = 1\,, \quad \sum x_k^2 = 0^2 + 1^2 + 0^2 = 1$$

$$y_1 = 0\,, \quad y_2 = 0\,, \quad y_3 = 1$$

$$\sum y_k$$

Beispiel zur Ausgleichsgerade

Punkte: $P_1 = (0,0)\,, \quad P_2 = (1,0)\,, \quad P_3 = (0,1)\,, \quad n = 3$

$$
\begin{aligned}
& x_1 = 0\,, \quad x_2 = 1\,, \quad x_3 = 0 \\
\sum x_k &= 0 + 1 + 0 = 1\,, \quad \sum x_k^2 = 0^2 + 1^2 + 0^2 = 1 \\
& y_1 = 0\,, \quad y_2 = 0\,, \quad y_3 = 1 \\
\sum y_k &= 0 + 0 + 1
\end{aligned}
$$

Beispiel zur Ausgleichsgerade

Punkte: $P_1 = (0,0)\,,\quad P_2 = (1,0)\,,\quad P_3 = (0,1)\,,\quad n = 3$

$$
\begin{aligned}
& x_1 = 0\,,\quad x_2 = 1\,,\quad x_3 = 0 \\
\sum x_k \;&=\; 0+1+0 = 1\,,\quad \sum x_k^2 = 0^2+1^2+0^2 = 1 \\
& y_1 = 0\,,\quad y_2 = 0\,,\quad y_3 = 1 \\
\sum y_k \;&=\; 0+0+1 = 1
\end{aligned}
$$

Beispiel zur Ausgleichsgerade

Punkte: $P_1 = (0,0)\,, \quad P_2 = (1,0)\,, \quad P_3 = (0,1)\,, \quad n = 3$

$$
\begin{aligned}
& x_1 = 0\,, \quad x_2 = 1\,, \quad x_3 = 0 \\
\sum x_k \;&=\; 0 + 1 + 0 = 1\,, \quad \sum x_k^2 = 0^2 + 1^2 + 0^2 = 1 \\
& y_1 = 0\,, \quad y_2 = 0\,, \quad y_3 = 1 \\
\sum y_k \;&=\; 0 + 0 + 1 = 1\,, \; \sum x_k y_k
\end{aligned}
$$

Beispiel zur Ausgleichsgerade

Punkte: $P_1 = (0,0)\,, \quad P_2 = (1,0)\,, \quad P_3 = (0,1)\,, \quad n = 3$

$$x_1 = 0\,, \quad x_2 = 1\,, \quad x_3 = 0$$

$$\sum x_k = 0 + 1 + 0 = 1\,, \quad \sum x_k^2 = 0^2 + 1^2 + 0^2 = 1$$

$$y_1 = 0\,, \quad y_2 = 0\,, \quad y_3 = 1$$

$$\sum y_k = 0 + 0 + 1 = 1\,, \sum x_k y_k = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1$$

Beispiel zur Ausgleichsgerade

Punkte: $P_1 = (0,0)\,, \quad P_2 = (1,0)\,, \quad P_3 = (0,1)\,, \quad n = 3$

$$x_1 = 0\,, \quad x_2 = 1\,, \quad x_3 = 0$$

$$\sum x_k = 0 + 1 + 0 = 1\,, \quad \sum x_k^2 = 0^2 + 1^2 + 0^2 = 1$$

$$y_1 = 0\,, \quad y_2 = 0\,, \quad y_3 = 1$$

$$\sum y_k = 0 + 0 + 1 = 1\,, \; \sum x_k y_k = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

Beispiel zur Ausgleichsgerade

Punkte: $P_1 = (0,0)\,, \quad P_2 = (1,0)\,, \quad P_3 = (0,1)\,, \quad n = 3$

$$\begin{aligned}
& x_1 = 0\,, \quad x_2 = 1\,, \quad x_3 = 0 \\
\sum x_k &= 0 + 1 + 0 = 1\,, \quad \sum x_k^2 = 0^2 + 1^2 + 0^2 = 1 \\
& y_1 = 0\,, \quad y_2 = 0\,, \quad y_3 = 1 \\
\sum y_k &= 0 + 0 + 1 = 1\,, \sum x_k y_k = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \\
u &= \frac{n \sum (x_k y_k) - (\sum x_k)(\sum y_k)}{n \sum x_k^2 - (\sum x_k)^2}
\end{aligned}$$

Beispiel zur Ausgleichsgerade

Punkte: $P_1 = (0,0)\,, \quad P_2 = (1,0)\,, \quad P_3 = (0,1)\,, \quad n = 3$

$$
\begin{aligned}
& x_1 = 0\,, \quad x_2 = 1\,, \quad x_3 = 0 \\
\sum x_k \ &= \ 0 + 1 + 0 = 1\,, \quad \sum x_k^2 = 0^2 + 1^2 + 0^2 = 1 \\
& y_1 = 0\,, \quad y_2 = 0\,, \quad y_3 = 1 \\
\sum y_k \ &= \ 0 + 0 + 1 = 1\,, \ \sum x_k y_k = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \\
u \ &= \ \frac{n \sum (x_k y_k) - (\sum x_k)(\sum y_k)}{n \sum x_k^2 - (\sum x_k)^2} = \frac{3 \cdot 0 - 1 \cdot 1}{3 \cdot 1 - 1^2}
\end{aligned}
$$

Beispiel zur Ausgleichsgerade

Punkte: $P_1 = (0,0)\,, \quad P_2 = (1,0)\,, \quad P_3 = (0,1)\,, \quad n = 3$

$$x_1 = 0\,, \quad x_2 = 1\,, \quad x_3 = 0$$

$$\sum x_k = 0+1+0 = 1\,, \quad \sum x_k^2 = 0^2 + 1^2 + 0^2 = 1$$

$$y_1 = 0\,, \quad y_2 = 0\,, \quad y_3 = 1$$

$$\sum y_k = 0+0+1 = 1\,, \sum x_k y_k = 0\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0$$

$$u = \frac{n\sum(x_k y_k) - (\sum x_k)(\sum y_k)}{n\sum x_k^2 - (\sum x_k)^2} = \frac{3\cdot 0 - 1\cdot 1}{3\cdot 1 - 1^2} = \frac{-1}{2}$$

Beispiel zur Ausgleichsgerade

Punkte: $P_1 = (0,0)\,, \quad P_2 = (1,0)\,, \quad P_3 = (0,1)\,, \quad n = 3$

$$\begin{aligned}
& x_1 = 0\,, \quad x_2 = 1\,, \quad x_3 = 0 \\
\sum x_k &= 0+1+0 = 1\,, \quad \sum x_k^2 = 0^2+1^2+0^2 = 1 \\
& y_1 = 0\,, \quad y_2 = 0\,, \quad y_3 = 1 \\
\sum y_k &= 0+0+1 = 1\,, \sum x_k y_k = 0\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0 \\
u &= \frac{n\sum(x_k y_k) - (\sum x_k)(\sum y_k)}{n\sum x_k^2 - (\sum x_k)^2} = \frac{3\cdot 0 - 1\cdot 1}{3\cdot 1 - 1^2} = \frac{-1}{2} \\
v &= \frac{(\sum x_k^2)(\sum y_k) - (\sum x_k)\sum(x_k y_k)}{n\sum x_k^2 - (\sum x_k)^2}
\end{aligned}$$

Beispiel zur Ausgleichsgerade

Punkte: $P_1 = (0,0)\,, \quad P_2 = (1,0)\,, \quad P_3 = (0,1)\,, \quad n = 3$

$$
\begin{aligned}
& x_1 = 0\,, \quad x_2 = 1\,, \quad x_3 = 0 \\
\sum x_k &= 0 + 1 + 0 = 1\,, \quad \sum x_k^2 = 0^2 + 1^2 + 0^2 = 1 \\
& y_1 = 0\,, \quad y_2 = 0\,, \quad y_3 = 1 \\
\sum y_k &= 0 + 0 + 1 = 1\,, \quad \sum x_k y_k = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \\
u &= \frac{n \sum (x_k y_k) - (\sum x_k)(\sum y_k)}{n \sum x_k^2 - (\sum x_k)^2} = \frac{3 \cdot 0 - 1 \cdot 1}{3 \cdot 1 - 1^2} = \frac{-1}{2} \\
v &= \frac{(\sum x_k^2)(\sum y_k) - (\sum x_k) \sum (x_k y_k)}{n \sum x_k^2 - (\sum x_k)^2} = \frac{1 \cdot 1 - 1 \cdot 0}{3 \cdot 1 - 1^2}
\end{aligned}
$$

Beispiel zur Ausgleichsgerade

Punkte: $P_1 = (0,0)\,, \quad P_2 = (1,0)\,, \quad P_3 = (0,1)\,, \quad n = 3$

$$
\begin{aligned}
& x_1 = 0\,, \quad x_2 = 1\,, \quad x_3 = 0 \\
\sum x_k &= 0 + 1 + 0 = 1\,, \quad \sum x_k^2 = 0^2 + 1^2 + 0^2 = 1 \\
& y_1 = 0\,, \quad y_2 = 0\,, \quad y_3 = 1 \\
\sum y_k &= 0 + 0 + 1 = 1\,, \sum x_k y_k = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \\
u &= \frac{n \sum (x_k y_k) - (\sum x_k)(\sum y_k)}{n \sum x_k^2 - (\sum x_k)^2} = \frac{3 \cdot 0 - 1 \cdot 1}{3 \cdot 1 - 1^2} = \frac{-1}{2} \\
v &= \frac{(\sum x_k^2)(\sum y_k) - (\sum x_k) \sum (x_k y_k)}{n \sum x_k^2 - (\sum x_k)^2} = \frac{1 \cdot 1 - 1 \cdot 0}{3 \cdot 1 - 1^2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Beispiel zur Ausgleichsgerade

Punkte: $P_1 = (0,0)\,, \quad P_2 = (1,0)\,, \quad P_3 = (0,1)\,, \quad n = 3$

$$
\begin{aligned}
& x_1 = 0\,, \quad x_2 = 1\,, \quad x_3 = 0 \\
\sum x_k &= 0 + 1 + 0 = 1\,, \quad \sum x_k^2 = 0^2 + 1^2 + 0^2 = 1 \\
& y_1 = 0\,, \quad y_2 = 0\,, \quad y_3 = 1 \\
\sum y_k &= 0 + 0 + 1 = 1\,, \sum x_k y_k = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \\
u &= \frac{n \sum (x_k y_k) - (\sum x_k)(\sum y_k)}{n \sum x_k^2 - (\sum x_k)^2} = \frac{3 \cdot 0 - 1 \cdot 1}{3 \cdot 1 - 1^2} = \frac{-1}{2} \\
v &= \frac{(\sum x_k^2)(\sum y_k) - (\sum x_k) \sum (x_k y_k)}{n \sum x_k^2 - (\sum x_k)^2} = \frac{1 \cdot 1 - 1 \cdot 0}{3 \cdot 1 - 1^2} = \frac{1}{2} \\
g : y &= f(x) = -\frac{1}{2} x + \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Ausgleichsgerade: Lösung mit Ableitungen

Geradengleichung $y = f(x) = ux + v$
Parameter u und v so bestimmen, dass $\sum\limits_k (f(x_k) - y_k)^2$ minimal wird.

Ausgleichsgerade: Lösung mit Ableitungen

Geradengleichung $y = f(x) = ux + v$
Parameter u und v so bestimmen, dass $\sum_k (f(x_k) - y_k)^2$ minimal wird.

$$\sum_k (f(x_k) - y_k)^2 = (ux_1 + v - y_1)^2 + (ux_2 + v - y_2)^2 + \cdots + (ux_n + v - y_n)^2$$

Ausgleichsgerade: Lösung mit Ableitungen

Geradengleichung $y = f(x) = ux + v$
Parameter u und v so bestimmen, dass $\sum_k (f(x_k) - y_k)^2$ minimal wird.

$$\sum_k (f(x_k) - y_k)^2 = (ux_1 + v - y_1)^2 + (ux_2 + v - y_2)^2 + \cdots + (ux_n + v - y_n)^2$$

Bei einem Minimum sind die Ableitungen Null

Ausgleichsgerade: Lösung mit Ableitungen

Geradengleichung $y = f(x) = ux + v$
Parameter u und v so bestimmen, dass $\sum_k (f(x_k) - y_k)^2$ minimal wird.

$$\sum_k (f(x_k) - y_k)^2 = (ux_1 + v - y_1)^2 + (ux_2 + v - y_2)^2 + \cdots + (ux_n + v - y_n)^2$$

Bei einem Minimum sind die Ableitungen Null
Ableitung nach u:

Ausgleichsgerade: Lösung mit Ableitungen

Geradengleichung $y = f(x) = ux + v$
Parameter u und v so bestimmen, dass $\sum_k (f(x_k) - y_k)^2$ minimal wird.

$$\sum_k (f(x_k) - y_k)^2 = (ux_1 + v - y_1)^2 + (ux_2 + v - y_2)^2 + \cdots + (ux_n + v - y_n)^2$$

Bei einem Minimum sind die Ableitungen Null
Ableitung nach u:

$$2(ux_1 + v - y_1)$$

Ausgleichsgerade: Lösung mit Ableitungen

Geradengleichung $y = f(x) = ux + v$
Parameter u und v so bestimmen, dass $\sum_k (f(x_k) - y_k)^2$ minimal wird.

$$\sum_k (f(x_k) - y_k)^2 = (ux_1 + v - y_1)^2 + (ux_2 + v - y_2)^2 + \cdots + (ux_n + v - y_n)^2$$

Bei einem Minimum sind die Ableitungen Null
Ableitung nach u:

$$2(ux_1 + v - y_1)x_1$$

Ausgleichsgerade: Lösung mit Ableitungen

Geradengleichung $y = f(x) = ux + v$
Parameter u und v so bestimmen, dass $\sum_k (f(x_k) - y_k)^2$ minimal wird.

$$\sum_k (f(x_k) - y_k)^2 = (ux_1 + v - y_1)^2 + (ux_2 + v - y_2)^2 + \cdots + (ux_n + v - y_n)^2$$

Bei einem Minimum sind die Ableitungen Null
Ableitung nach u:

$$2(ux_1 + v - y_1)x_1 + 2(ux_2 + v - y_2)$$

Ausgleichsgerade: Lösung mit Ableitungen

Geradengleichung $y = f(x) = ux + v$
Parameter u und v so bestimmen, dass $\sum_k (f(x_k) - y_k)^2$ minimal wird.

$$\sum_k (f(x_k) - y_k)^2 = (ux_1 + v - y_1)^2 + (ux_2 + v - y_2)^2 + \cdots + (ux_n + v - y_n)^2$$

Bei einem Minimum sind die Ableitungen Null
Ableitung nach u:

$$2(ux_1 + v - y_1)x_1 + 2(ux_2 + v - y_2)x_2$$

Ausgleichsgerade: Lösung mit Ableitungen

Geradengleichung $y = f(x) = ux + v$
Parameter u und v so bestimmen, dass $\sum\limits_k (f(x_k) - y_k)^2$ minimal wird.

$$\sum_k (f(x_k) - y_k)^2 = (ux_1 + v - y_1)^2 + (ux_2 + v - y_2)^2 + \cdots + (ux_n + v - y_n)^2$$

Bei einem Minimum sind die Ableitungen Null
Ableitung nach u:

$$2(ux_1 + v - y_1)x_1 + 2(ux_2 + v - y_2)x_2 + \cdots + 2(ux_n + v - y_n)$$

Ausgleichsgerade: Lösung mit Ableitungen

Geradengleichung $y = f(x) = ux + v$
Parameter u und v so bestimmen, dass $\sum_k (f(x_k) - y_k)^2$ minimal wird.

$$\sum_k (f(x_k) - y_k)^2 = (ux_1 + v - y_1)^2 + (ux_2 + v - y_2)^2 + \cdots + (ux_n + v - y_n)^2$$

Bei einem Minimum sind die Ableitungen Null
Ableitung nach u:

$$2(ux_1 + v - y_1)x_1 + 2(ux_2 + v - y_2)x_2 + \cdots + 2(ux_n + v - y_n)x_n$$

Ausgleichsgerade: Lösung mit Ableitungen

Geradengleichung $y = f(x) = ux + v$
Parameter u und v so bestimmen, dass $\sum_k (f(x_k) - y_k)^2$ minimal wird.

$$\sum_k (f(x_k) - y_k)^2 = (ux_1 + v - y_1)^2 + (ux_2 + v - y_2)^2 + \cdots + (ux_n + v - y_n)^2$$

Bei einem Minimum sind die Ableitungen Null
Ableitung nach u:

$$2(ux_1 + v - y_1)x_1 + 2(ux_2 + v - y_2)x_2 + \cdots + 2(ux_n + v - y_n)x_n$$

Ableitung nach v:

Ausgleichsgerade: Lösung mit Ableitungen

Geradengleichung $y = f(x) = ux + v$
Parameter u und v so bestimmen, dass $\sum_k (f(x_k) - y_k)^2$ minimal wird.

$$\sum_k (f(x_k) - y_k)^2 = (ux_1 + v - y_1)^2 + (ux_2 + v - y_2)^2 + \cdots + (ux_n + v - y_n)^2$$

Bei einem Minimum sind die Ableitungen Null
Ableitung nach u:

$$2(ux_1 + v - y_1)x_1 + 2(ux_2 + v - y_2)x_2 + \cdots + 2(ux_n + v - y_n)x_n$$

Ableitung nach v:

$$2(ux_1 + v - y_1)$$

Ausgleichsgerade: Lösung mit Ableitungen

Geradengleichung $y = f(x) = ux + v$
Parameter u und v so bestimmen, dass $\sum_k (f(x_k) - y_k)^2$ minimal wird.

$$\sum_k (f(x_k) - y_k)^2 = (ux_1 + v - y_1)^2 + (ux_2 + v - y_2)^2 + \cdots + (ux_n + v - y_n)^2$$

Bei einem Minimum sind die Ableitungen Null
Ableitung nach u:

$$2(ux_1 + v - y_1)x_1 + 2(ux_2 + v - y_2)x_2 + \cdots + 2(ux_n + v - y_n)x_n$$

Ableitung nach v:

$$2(ux_1 + v - y_1)$$

Ausgleichsgerade: Lösung mit Ableitungen

Geradengleichung $y = f(x) = ux + v$
Parameter u und v so bestimmen, dass $\sum_k (f(x_k) - y_k)^2$ minimal wird.

$$\sum_k (f(x_k) - y_k)^2 = (ux_1 + v - y_1)^2 + (ux_2 + v - y_2)^2 + \cdots + (ux_n + v - y_n)^2$$

Bei einem Minimum sind die Ableitungen Null
Ableitung nach u:

$$2(ux_1 + v - y_1)x_1 + 2(ux_2 + v - y_2)x_2 + \cdots + 2(ux_n + v - y_n)x_n$$

Ableitung nach v:

$$2(ux_1 + v - y_1) + 2(ux_2 + v - y_2)$$

Ausgleichsgerade: Lösung mit Ableitungen

Geradengleichung $y = f(x) = ux + v$
Parameter u und v so bestimmen, dass $\sum_k (f(x_k) - y_k)^2$ minimal wird.

$$\sum_k (f(x_k) - y_k)^2 = (ux_1 + v - y_1)^2 + (ux_2 + v - y_2)^2 + \cdots + (ux_n + v - y_n)^2$$

Bei einem Minimum sind die Ableitungen Null
Ableitung nach u:

$$2(ux_1 + v - y_1)x_1 + 2(ux_2 + v - y_2)x_2 + \cdots + 2(ux_n + v - y_n)x_n$$

Ableitung nach v:

$$2(ux_1 + v - y_1) + 2(ux_2 + v - y_2) + \cdots + 2(ux_n + v - y_n)$$

Ausgleichsgerade: Lösung mit Ableitungen

Geradengleichung $y = f(x) = ux + v$
Parameter u und v so bestimmen, dass $\sum_k (f(x_k) - y_k)^2$ minimal wird.

$$\sum_k (f(x_k) - y_k)^2 = (ux_1 + v - y_1)^2 + (ux_2 + v - y_2)^2 + \cdots + (ux_n + v - y_n)^2$$

Bei einem Minimum sind die Ableitungen Null
Ableitung nach u:

$$2(ux_1 + v - y_1)x_1 + 2(ux_2 + v - y_2)x_2 + \cdots + 2(ux_n + v - y_n)x_n$$

Ableitung nach v:

$$2(ux_1 + v - y_1) + 2(ux_2 + v - y_2) + \cdots + 2(ux_n + v - y_n)$$

Ausgleichsgerade: Lösung mit Ableitungen

$$
\begin{aligned}
0 &= 2(ux_1 + v - y_1)x_1 + 2(ux_2 + v - y_2)x_2 + \cdots + 2(ux_n + v - y_n)x_n \\
0 &= 2(ux_1 + v - y_1) + 2(ux_2 + v - y_2) + \cdots + 2(ux_n + v - y_n)
\end{aligned}
$$

Ausgleichsgerade: Lösung mit Ableitungen

$$\begin{aligned} 0 &= 2(ux_1 + v - y_1)x_1 + 2(ux_2 + v - y_2)x_2 + \cdots + 2(ux_n + v - y_n)x_n \\ 0 &= 2(ux_1 + v - y_1) + 2(ux_2 + v - y_2) + \cdots + 2(ux_n + v - y_n) \end{aligned}$$

Ausgleichsgerade: Lösung mit Ableitungen

$$
\begin{aligned}
0 &= (ux_1 + v - y_1)x_1 + (ux_2 + v - y_2)x_2 + \cdots + (ux_n + v - y_n)x_n \\
0 &= (ux_1 + v - y_1) + (ux_2 + v - y_2) + \cdots + (ux_n + v - y_n)
\end{aligned}
$$

Ausgleichsgerade: Lösung mit Ableitungen

$$
\begin{aligned}
0 &= (ux_1 + v - y_1)x_1 + (ux_2 + v - y_2)x_2 + \cdots + (ux_n + v - y_n)x_n \\
0 &= (ux_1 + v - y_1) + (ux_2 + v - y_2) + \cdots + (ux_n + v - y_n)
\end{aligned}
$$

$$0 =$$

Ausgleichsgerade: Lösung mit Ableitungen

$$
\begin{aligned}
0 &= (ux_1 + v - y_1)x_1 + (ux_2 + v - y_2)x_2 + \cdots + (ux_n + v - y_n)x_n \\
0 &= (ux_1 + v - y_1) + (ux_2 + v - y_2) + \cdots + (ux_n + v - y_n)
\end{aligned}
$$

$$0 =$$

Ausgleichsgerade: Lösung mit Ableitungen

$$
\begin{aligned}
0 &= (ux_1 + v - y_1)x_1 + (ux_2 + v - y_2)x_2 + \cdots + (ux_n + v - y_n)x_n \\
0 &= (ux_1 + v - y_1) + (ux_2 + v - y_2) + \cdots + (ux_n + v - y_n)
\end{aligned}
$$

$$0 = u \sum (x_k)^2$$

Ausgleichsgerade: Lösung mit Ableitungen

$$
\begin{aligned}
0 &= (ux_1 + v - y_1)x_1 + (ux_2 + v - y_2)x_2 + \cdots + (ux_n + v - y_n)x_n \\
0 &= (ux_1 + v - y_1) + (ux_2 + v - y_2) + \cdots + (ux_n + v - y_n)
\end{aligned}
$$

$$
0 = u \sum (x_k)^2
$$

Ausgleichsgerade: Lösung mit Ableitungen

$$
\begin{aligned}
0 &= (ux_1 + v - y_1)x_1 + (ux_2 + v - y_2)x_2 + \cdots + (ux_n + v - y_n)x_n \\
0 &= (ux_1 + v - y_1) + (ux_2 + v - y_2) + \cdots + (ux_n + v - y_n)
\end{aligned}
$$

$$
0 = u \sum (x_k)^2 + v \sum x_k
$$

Ausgleichsgerade: Lösung mit Ableitungen

$$\begin{aligned} 0 &= (ux_1 + v - y_1)x_1 + (ux_2 + v - y_2)x_2 + \cdots + (ux_n + v - y_n)x_n \\ 0 &= (ux_1 + v - y_1) + (ux_2 + v - y_2) + \cdots + (ux_n + v - y_n) \end{aligned}$$

$$0 = u \sum (x_k)^2 + v \sum x_k$$

Ausgleichsgerade: Lösung mit Ableitungen

$$
\begin{aligned}
0 &= (ux_1 + v - y_1)x_1 + (ux_2 + v - y_2)x_2 + \cdots + (ux_n + v - y_n)x_n \\
0 &= (ux_1 + v - y_1) + (ux_2 + v - y_2) + \cdots + (ux_n + v - y_n)
\end{aligned}
$$

$$
0 = u \sum (x_k)^2 + v \sum x_k - \sum (x_k y_k)
$$

Ausgleichsgerade: Lösung mit Ableitungen

$$
\begin{aligned}
0 &= (ux_1 + v - y_1)x_1 + \ (ux_2 + v - y_2)x_2 + \cdots + \ (ux_n + v - y_n)x_n \\
0 &= (ux_1 + v - y_1) + \ (ux_2 + v - y_2) + \cdots + \ (ux_n + v - y_n)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= u \sum (x_k)^2 + v \sum x_k - \sum (x_k y_k) \\
0 &=
\end{aligned}
$$

Ausgleichsgerade: Lösung mit Ableitungen

$$
\begin{aligned}
0 &= (ux_1 + v - y_1)x_1 + (ux_2 + v - y_2)x_2 + \cdots + (ux_n + v - y_n)x_n \\
0 &= (ux_1 + v - y_1) + (ux_2 + v - y_2) + \cdots + (ux_n + v - y_n)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= u \sum (x_k)^2 + v \sum x_k - \sum (x_k y_k) \\
0 &=
\end{aligned}
$$

Ausgleichsgerade: Lösung mit Ableitungen

$$
\begin{aligned}
0 &= (ux_1 + v - y_1)x_1 + (ux_2 + v - y_2)x_2 + \cdots + (ux_n + v - y_n)x_n \\
0 &= (ux_1 + v - y_1) + (ux_2 + v - y_2) + \cdots + (ux_n + v - y_n)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= u\sum(x_k)^2 + v\sum x_k - \sum(x_k y_k) \\
0 &= u\sum x_k
\end{aligned}
$$

Ausgleichsgerade: Lösung mit Ableitungen

$$\begin{aligned} 0 &= (ux_1 + v - y_1)x_1 + (ux_2 + v - y_2)x_2 + \cdots + (ux_n + v - y_n)x_n \\ 0 &= (ux_1 + v - y_1) + (ux_2 + v - y_2) + \cdots + (ux_n + v - y_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= u\sum(x_k)^2 + v\sum x_k - \sum(x_k y_k) \\ 0 &= u\sum x_k \end{aligned}$$

Ausgleichsgerade: Lösung mit Ableitungen

$$
\begin{aligned}
0 &= (ux_1 + v - y_1)x_1 + (ux_2 + v - y_2)x_2 + \cdots + (ux_n + v - y_n)x_n \\
0 &= (ux_1 + v - y_1) + (ux_2 + v - y_2) + \cdots + (ux_n + v - y_n)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= u \sum (x_k)^2 + v \sum x_k - \sum (x_k y_k) \\
0 &= u \sum x_k + vn
\end{aligned}
$$

Ausgleichsgerade: Lösung mit Ableitungen

$$\begin{aligned} 0 &= (ux_1 + v - y_1)x_1 + (ux_2 + v - y_2)x_2 + \cdots + (ux_n + v - y_n)x_n \\ 0 &= (ux_1 + v - y_1) + (ux_2 + v - y_2) + \cdots + (ux_n + v - y_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= u \sum (x_k)^2 + v \sum x_k - \sum (x_k y_k) \\ 0 &= u \sum x_k + vn \end{aligned}$$

Ausgleichsgerade: Lösung mit Ableitungen

$$
\begin{aligned}
0 &= (ux_1 + v - y_1)x_1 + (ux_2 + v - y_2)x_2 + \cdots + (ux_n + v - y_n)x_n \\
0 &= (ux_1 + v - {\color{red}y_1}) + (ux_2 + v - {\color{red}y_2}) + \cdots + (ux_n + v - {\color{red}y_n})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= u \sum (x_k)^2 + v \sum x_k - \sum (x_k y_k) \\
0 &= u \sum x_k + vn - \sum y_k
\end{aligned}
$$

Ausgleichsgerade: Lösung mit Ableitungen

$$
\begin{aligned}
0 &= (ux_1 + v - y_1)x_1 + (ux_2 + v - y_2)x_2 + \cdots + (ux_n + v - y_n)x_n \\
0 &= (ux_1 + v - y_1) + (ux_2 + v - y_2) + \cdots + (ux_n + v - y_n)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= u \sum (x_k)^2 + v \sum x_k - \sum (x_k y_k) \\
0 &= u \sum x_k + vn - \sum y_k
\end{aligned}
$$

Ausgleichsgerade: Lösung mit Ableitungen

$$\begin{aligned} 0 &= (ux_1 + v - y_1)x_1 + (ux_2 + v - y_2)x_2 + \cdots + (ux_n + v - y_n)x_n \\ 0 &= (ux_1 + v - y_1) + (ux_2 + v - y_2) + \cdots + (ux_n + v - y_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= u\sum(x_k)^2 + v\sum x_k - \sum(x_k y_k) \\ 0 &= u\sum x_k + vn - \sum y_k \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \sum x_k^2 & \sum x_k \\ \sum x_k & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum(x_k y_k) \\ \sum y_k \end{pmatrix}$$

Verallgemeinerung für lineares Modell

Datenpunkte $P_k = (x_k, y_k)$, $k = 1, \ldots, n$ sollen durch eine Gerade

$$y = f(x) = u_0 + u_1 x$$

approximiert werden.

Nach der Gaußschen Methode der kleinsten Fehlerquadrate sind die Parameter u_0, u_1 so zu wählen, dass $|Au - b|^2$ minimal wird, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Die Lösung u kann über die Normalengleichungen oder durch Nullsetzen der Ableitungen ermittelt werden.

Verallgemeinerung für lineares Modell

Datenpunkte $P_k = (x_k, y_k)$, $k = 1, ..., n$ sollen durch eine Parabel

$$y = f(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2$$

approximiert werden.

Verallgemeinerung für lineares Modell

Datenpunkte $P_k = (x_k, y_k)$, $k = 1, \dots, n$ sollen durch eine Parabel

$$y = f(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2$$

approximiert werden.

Nach der Gaußschen Methode der kleinsten Fehlerquadrate sind die Parameter u_0, u_1, u_2 so zu wählen, dass $|Au - b|^2$ minimal wird, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Verallgemeinerung für lineares Modell

Datenpunkte $P_k = (x_k, y_k)$, $k = 1, \ldots, n$ sollen durch eine Parabel

$$y = f(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2$$

approximiert werden.

Nach der Gaußschen Methode der kleinsten Fehlerquadrate sind die Parameter u_0, u_1, u_2 so zu wählen, dass $|Au - b|^2$ minimal wird, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Die Lösung u kann über die Normalengleichungen oder durch Nullsetzen der Ableitungen ermittelt werden.

Verallgemeinerung für lineares Modell

Datenpunkte $P_k = (x_k, y_k)$, $k = 1, ..., n$ sollen durch eine Logarithmusfunktion

$$y = f(x) = u_0 + u_1 \ln(x)$$

approximiert werden.

Verallgemeinerung für lineares Modell

Datenpunkte $P_k = (x_k, y_k)$, $k = 1, \ldots, n$ sollen durch eine Logarithmusfunktion

$$y = f(x) = u_0 + u_1 \ln(x)$$

approximiert werden.

Nach der Gaußschen Methode der kleinsten Fehlerquadrate sind die Parameter u_0, u_1 so zu wählen, dass $|Au - b|^2$ minimal wird, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \ln x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \ln x_n \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Verallgemeinerung für lineares Modell

Datenpunkte $P_k = (x_k, y_k)$, $k = 1, ..., n$ sollen durch eine Logarithmusfunktion

$$y = f(x) = u_0 + u_1 \ln(x)$$

approximiert werden.

Nach der Gaußschen Methode der kleinsten Fehlerquadrate sind die Parameter u_0, u_1 so zu wählen, dass $|Au - b|^2$ minimal wird, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \ln x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \ln x_n \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Die Lösung u kann über die Normalengleichungen oder durch Nullsetzen der Ableitungen ermittelt werden.

Verallgemeinerung für lineares Modell

Datenpunkte $P_k = (x_k, y_k)$, $k = 1, \ldots, n$ sollen durch eine Funktion

$$y = f(x) = \sum_{\ell=1}^{m} u_\ell f_\ell(x)$$

approximiert werden.

Verallgemeinerung für lineares Modell

Datenpunkte $P_k = (x_k, y_k)$, $k = 1, \ldots, n$ sollen durch eine Funktion

$$y = f(x) = \sum_{\ell=1}^{m} u_\ell f_\ell(x)$$

approximiert werden.
Nach der Gaußschen Methode der kleinsten Fehlerquadrate sind die Parameter u_ℓ so zu wählen, dass $|Au - b|^2$ minimal wird, wobei

$$A = \begin{pmatrix} f_1(x_1) & \ldots & f_m(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1(x_n) & \ldots & f_m(x_n) \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Verallgemeinerung für lineares Modell

Datenpunkte $P_k = (x_k, y_k)$, $k = 1, \ldots, n$ sollen durch eine Funktion

$$y = f(x) = \sum_{\ell=1}^{m} u_\ell f_\ell(x)$$

approximiert werden.
Nach der Gaußschen Methode der kleinsten Fehlerquadrate sind die Parameter u_ℓ so zu wählen, dass $|Au - b|^2$ minimal wird, wobei

$$A = \begin{pmatrix} f_1(x_1) & \ldots & f_m(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1(x_n) & \ldots & f_m(x_n) \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Die Lösung u kann über die Normalengleichungen oder durch Nullsetzen der Ableitungen ermittelt werden.

Linearisierung

Datenpunkte $P_k = (x_k, y_k)$, $k = 1, ..., n$ sollen durch eine Exponentialfunktion

$$y = f(x) = c\exp(\gamma x)$$

approximiert werden.

Linearisierung

Datenpunkte $P_k = (x_k, y_k)$, $k = 1, ..., n$ sollen durch eine Exponentialfunktion

$$y = f(x) = c\exp(\gamma x)$$

approximiert werden.
Durch Logarithmieren erhält man

$$\ln y = \ln(c\exp(\gamma x))$$

Linearisierung

Datenpunkte $P_k = (x_k, y_k)$, $k = 1, ..., n$ sollen durch eine Exponentialfunktion

$$y = f(x) = c \exp(\gamma x)$$

approximiert werden.
Durch Logarithmieren erhält man

$$\ln y = \ln(c \exp(\gamma x)) = \ln c + \ln(\exp(\gamma x))$$

Linearisierung

Datenpunkte $P_k = (x_k, y_k)$, $k = 1, ..., n$ sollen durch eine Exponentialfunktion

$$y = f(x) = c \exp(\gamma x)$$

approximiert werden.
Durch Logarithmieren erhält man

$$\ln y = \ln(c \exp(\gamma x)) = \ln c + \ln(\exp(\gamma x)) = \ln c + \gamma x$$

Linearisierung

Datenpunkte $P_k = (x_k, y_k)$, $k = 1, ..., n$ sollen durch eine Exponentialfunktion

$$y = f(x) = c\exp(\gamma x)$$

approximiert werden.
Durch Logarithmieren erhält man

$$\ln y = \ln(c\exp(\gamma x)) = \ln c + \ln(\exp(\gamma x)) = \ln c + \gamma x = \tilde{c} + \gamma x$$

Linearisierung

Datenpunkte $P_k = (x_k, y_k)$, $k = 1, ..., n$ sollen durch eine Exponentialfunktion

$$y = f(x) = c \exp(\gamma x)$$

approximiert werden.
Durch Logarithmieren erhält man

$$\ln y = \ln(c \exp(\gamma x)) = \ln c + \ln(\exp(\gamma x)) = \ln c + \gamma x = \tilde{c} + \gamma x$$

Dies entspricht einer Ausgleichsgeraden durch die Punkte $\tilde{P}_k = (x_k, \ln y_k)$, $k = 1, ..., n$.

Linearisierung

Datenpunkte $P_k = (x_k, y_k)$, $k = 1, ..., n$ sollen durch eine Exponentialfunktion

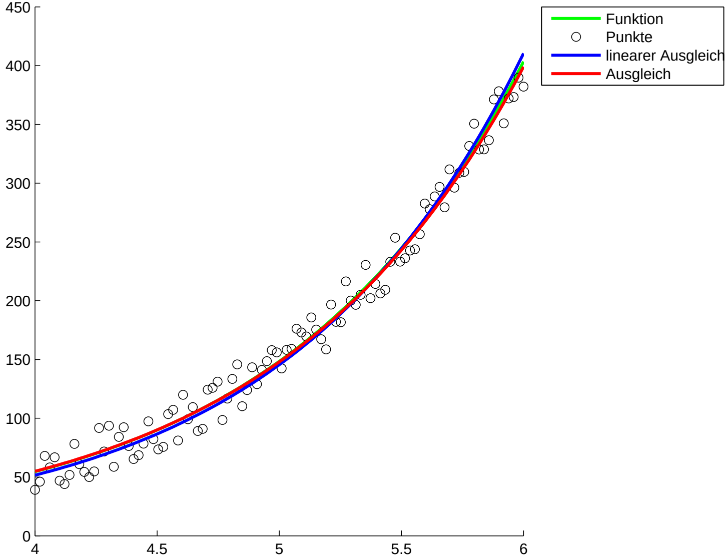
$$y = f(x) = c \exp(\gamma x)$$

approximiert werden.
Durch Logarithmieren erhält man

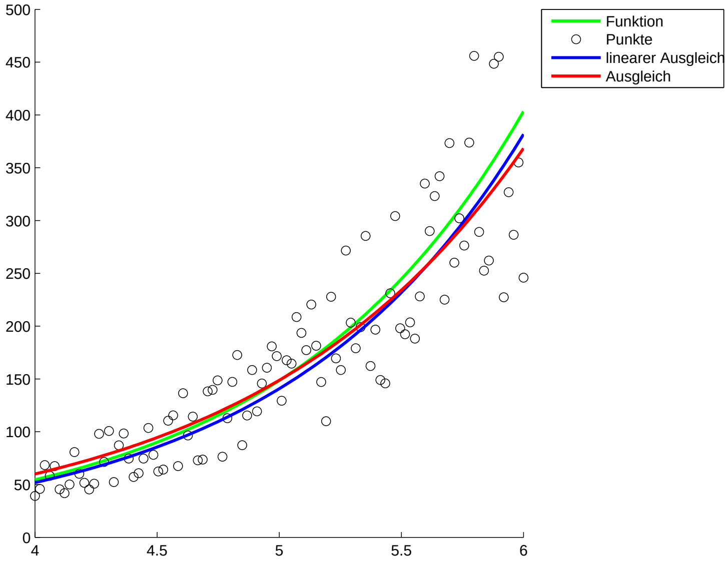
$$\ln y = \ln(c \exp(\gamma x)) = \ln c + \ln(\exp(\gamma x)) = \ln c + \gamma x = \tilde{c} + \gamma x$$

Dies entspricht einer Ausgleichsgeraden durch die Punkte $\tilde{P}_k = (x_k, \ln y_k)$, $k = 1, ..., n$.
Durch die Linearisierung wird ein anderer Fehler als bei der ursprünglichen Funktion minimiert.

Beispiel: Exponentialfunktion, absolut gestörte Werte



Beispiel: Exponentialfunktion, relativ gestörte Werte



Aufgabe 1

Die Koeffizienten u und v der Funktion

$$y(x) = ux^2 + v$$

sollen aus den folgenden Messdaten näherungsweise bestimmt werden:

x	2	3	4
$y(x)$	3	13	27

- Formulieren Sie das entsprechende Ausgleichsproblem.
- Stellen Sie die Normalengleichungen auf.
- Lösen Sie das Ausgleichsproblem.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1

- Das Ausgleichsproblem ergibt sich durch einzelnes Einsetzen der Datenpunkte in die Gleichung (jeder Datenpunkt erzeugt eine Gleichung)

$$
\begin{aligned}
p(x_1) = ux_1^2 + v \quad &\Rightarrow \quad 3 = u \cdot 2^2 + v \Rightarrow u \cdot 4 + v \cdot 1 = 3 \\
p(x_2) = ux_2^2 + v \quad &\Rightarrow \quad 13 = u \cdot 3^2 + v \Rightarrow u \cdot 9 + v \cdot 1 = 13 \\
p(x_3) = ux_3^2 + v \quad &\Rightarrow \quad 27 = u \cdot 4^2 + v \Rightarrow u \cdot 16 + v \cdot 1 = 27
\end{aligned}
$$

und anschließendes Minimieren der Norm des Differenzvektors

$$
\left| \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 9 & 1 \\ 16 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 27 \end{pmatrix} \right| \to \min
$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(2)

- Die Normalengleichungen haben die Form $A^{\mathrm{t}}Aw = A^{\mathrm{t}}b$, also

$$\begin{pmatrix} 353 & 29 \\ 29 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 561 \\ 43 \end{pmatrix}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(2)

- Die Normalengleichungen haben die Form $A^t Aw = A^t b$, also

$$\begin{pmatrix} 353 & 29 \\ 29 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 561 \\ 43 \end{pmatrix}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(2)

- Die Normalengleichungen haben die Form $A^\mathrm{t} A w = A^\mathrm{t} b$, also

$$\begin{pmatrix} 353 & 29 \\ 29 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 561 \\ 43 \end{pmatrix}$$

- Zieht man das 29-fache der zweiten Gleichung vom dreifachen der ersten ab, ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 218 & 0 \\ 29 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 436 \\ 43 \end{pmatrix}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(2)

- Die Normalengleichungen haben die Form $A^{\mathrm{t}}Aw = A^{\mathrm{t}}b$, also

$$\begin{pmatrix} 353 & 29 \\ 29 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 561 \\ 43 \end{pmatrix}$$

- Zieht man das 29-fache der zweiten Gleichung vom dreifachen der ersten ab, ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 218 & 0 \\ 29 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 436 \\ 43 \end{pmatrix}$$

also $u = 2$ und durch Einsetzen in die zweite Gleichung erhält man $v = (43 - 2 \cdot 29)/3 = -5$.

Aufgabe 2

Die zeitliche Änderung der Strahlungsintensität S bei einem radioaktivem Zerfall kann durch

$$S = m_0 2^{-\frac{t}{T}} \Leftrightarrow \ln S = \ln m_0 - t\,\frac{\ln 2}{T}$$

beschrieben werden. Schreiben Sie ein MATLAB-Programm `function [m0,T] = zerfall(S,t)`, das aus gemessenen Strahlungsintensitäten S_k zu Zeiten t_k die Halbwertszeit T und die Anfangsmenge m_0 des radioaktiven Materials bestimmt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2

Verwendet man neue Bezeichnungen: $u = \ln m_0$, $v = -\frac{\ln 2}{T}$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2

Verwendet man neue Bezeichnungen: $u = \ln m_0\,,\, v = -\frac{\ln 2}{T}$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2

Verwendet man neue Bezeichnungen: $u = \ln m_0$, $v = -\frac{\ln 2}{T}$ hat das zu lösende Problem die Form

$$\ln S = u + vt\,,$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2

Verwendet man neue Bezeichnungen: $u = \ln m_0$, $v = -\frac{\ln 2}{T}$ hat das zu lösende Problem die Form

$$\ln S = u + vt\,,$$

es ist also eine Ausgleichsgerade zu finden.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2

Verwendet man neue Bezeichnungen: $u = \ln m_0$, $v = -\frac{\ln 2}{T}$ hat das zu lösende Problem die Form

$$\ln S = u + vt\,,$$

es ist also eine Ausgleichsgerade zu finden.
Das entsprechende Programm hat dann z.B. die folgende Gestalt:

```
function [m0,T] = zerfall(S,t)
% Matrix, rechte Seite des überbestimmten Gleichungssystems
A = [ones(size(t)),t]; b = log(S);
% Normalengleichungen
AtA = A'*A;
Atb = A'*b;
% Lösung
uv = AtA\Atb;
% Umrechnung der Parameter
m0 = exp(uv(1));
T  = -log(2)./uv(2);
```

Aufgabe 3

- Erzeugen Sie 100 Datenpunkte (x_k, y_k) die auf einer Geraden liegen.
- Stören Sie die y-Werte und berechnen Sie dann die Ausgleichsgerade.
  - `linspace(a,b,100)'` erzeugt einen Vektor mit 100 Werten die das Intervall (a, b) linear unterteilen.
  - `0.2*rand(100,1)-.1` liefert 100 zufällige Werte im Bereich $(-.1, .1)$.
  - `ones(100,1)` liefert einen Vektor mit lauter Einsen.
  - Matrizen können aus Vektoren zusammengesetzt werden.
  - `A'` liefert die zu A transponierte Matrix.
- Wandeln Sie das Programm so ab, dass die Punkte auf einer Parabel liegen und eine Ausgleichsparabel bestimmt wird.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3

```
% Parameter
a=0;b=10;n=100;u_ein=1;v_ein=0;
% Originalwerte
x=linspace(a,b,n)';
y=u_ein*x+v_ein;
%Stoerung
s=.4*rand(100,1)-.2;
ys=y+s;
% Ausgleichsproblem
A=[x,ones(100,1)];
w=(A'*A)\(A'*ys);
% Ausgabe
clf;hold on
plot(x,y,'-g','linewidth',2);
plot(x,ys,'ok');
plot(x,w(1)*x+w(2),'-b','linewidth',2);
legend('Gerade','Punkte','Approximation',-1);
```

Lösungsvorschlag zu 3

```
% Parameter
a=-1;b=3;n=100;u0=-1;u1=-2;u2=1;
% Originalwerte
x=linspace(a,b,n)';
y=u2*x.^2+u1*x+u0;
%Stoerung
s=.4*rand(100,1)-.2;
ys=y+s;
% Ausgleichsproblem
A=[x.^2,x,ones(100,1)];
w=(A'*A)\(A'*ys);
% Ausgabe
clf;hold on
plot(x,y,'-g','linewidth',2);
plot(x,ys,'ok');
plot(x,w(1)*x.^2+w(2)*x+w(3),'-b','linewidth',2);
legend('Parabel','Punkte','Approximation',-1);
```

Nullstellen nichtlinearer Funktionen

Einführung

- Lineare Gleichung: $ax = b$ oder $ax - b = 0$

Einführung

- Lineare Gleichung: $ax = b$ oder $ax - b = 0$
  $\rightarrow$ Lösung: $x = b/a$.

Einführung

- Lineare Gleichung: $ax = b$ oder $ax - b = 0$
  $\rightarrow$ Lösung: $x = b/a$.
- Quadratische Gleichung: $ax^2 + bx + c = 0$

Einführung

- Lineare Gleichung: $ax = b$ oder $ax - b = 0$
  $\rightarrow$ Lösung: $x = b/a$.
- Quadratische Gleichung: $ax^2 + bx + c = 0$
  $\rightarrow$ Lösung mit Mitternachtsformel: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Einführung

- Lineare Gleichung: $ax = b$ oder $ax - b = 0$
  $\rightarrow$ Lösung: $x = b/a$.
- Quadratische Gleichung: $ax^2 + bx + c = 0$
  $\rightarrow$ Lösung mit Mitternachtsformel: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- Kubische und Quartische Gleichungen

Einführung

- Lineare Gleichung: $ax = b$ oder $ax - b = 0$
  $\rightarrow$ Lösung: $x = b/a$.
- Quadratische Gleichung: $ax^2 + bx + c = 0$
  $\rightarrow$ Lösung mit Mitternachtsformel: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- Kubische und Quartische Gleichungen
  $\rightarrow$ Lösung mit Cardanoschen Formeln

Einführung

- Lineare Gleichung: $ax = b$ oder $ax - b = 0$
  $\rightarrow$ Lösung: $x = b/a$.
- Quadratische Gleichung: $ax^2 + bx + c = 0$
  $\rightarrow$ Lösung mit Mitternachtsformel: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- Kubische und Quartische Gleichungen
  $\rightarrow$ Lösung mit Cardanoschen Formeln
- Gleichung höherer Ordnung:

Einführung

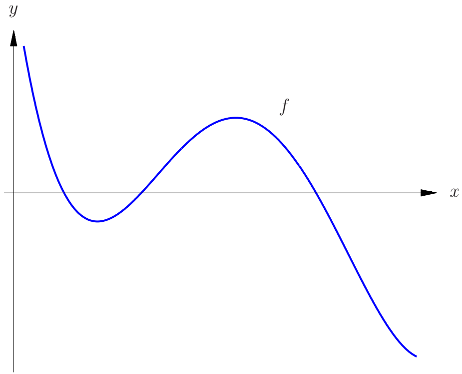
- Lineare Gleichung: $ax = b$ oder $ax - b = 0$
  $\rightarrow$ Lösung: $x = b/a$.
- Quadratische Gleichung: $ax^2 + bx + c = 0$
  $\rightarrow$ Lösung mit Mitternachtsformel: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- Kubische und Quartische Gleichungen
  $\rightarrow$ Lösung mit Cardanoschen Formeln
- Gleichung höherer Ordnung:
  keine allgemeine Lösungsformel

Einführung

- Lineare Gleichung: $ax = b$ oder $ax - b = 0$
  $\rightarrow$ Lösung: $x = b/a$.
- Quadratische Gleichung: $ax^2 + bx + c = 0$
  $\rightarrow$ Lösung mit Mitternachtsformel: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- Kubische und Quartische Gleichungen
  $\rightarrow$ Lösung mit Cardanoschen Formeln
- Gleichung höherer Ordnung:
  keine allgemeine Lösungsformel
  $\rightarrow$ numerische Lösung mit Iterationsverfahren

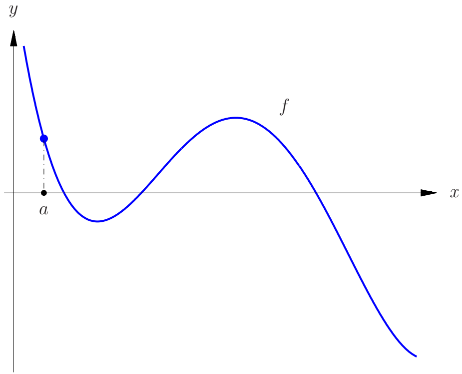
Bisektionsverfahren

Eine stetige Funktion f, die an a und b unterschiedliche Vorzeichen hat, hat im Intervall (a, b) (mindestens) eine Nullstelle.



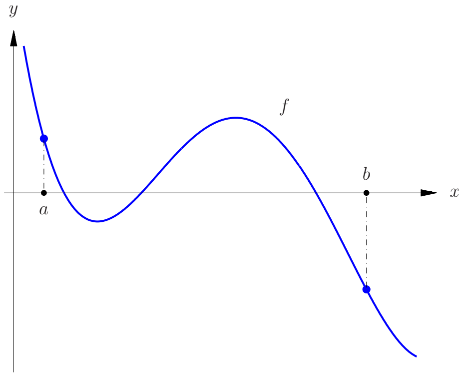
Bisektionsverfahren

Eine stetige Funktion f, die an a und b unterschiedliche Vorzeichen hat, hat im Intervall (a, b) (mindestens) eine Nullstelle.



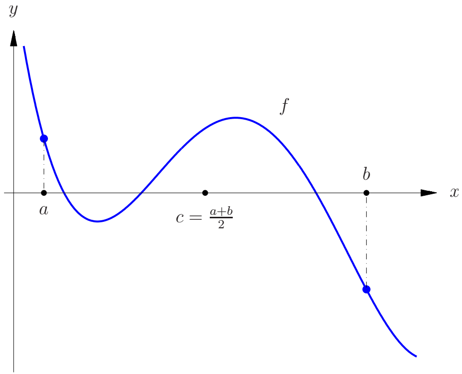
Bisektionsverfahren

Eine stetige Funktion f, die an a und b unterschiedliche Vorzeichen hat, hat im Intervall (a, b) (mindestens) eine Nullstelle.



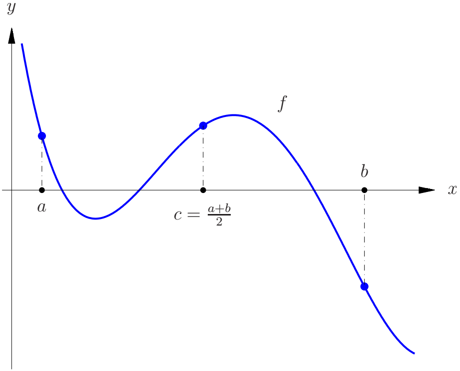
Bisektionsverfahren

Wird das Intervall am Mittelpunkt $c = (a+b)/2$ aufgeteilt, so liegt in einem der Teilintervalle eine Nullstelle.



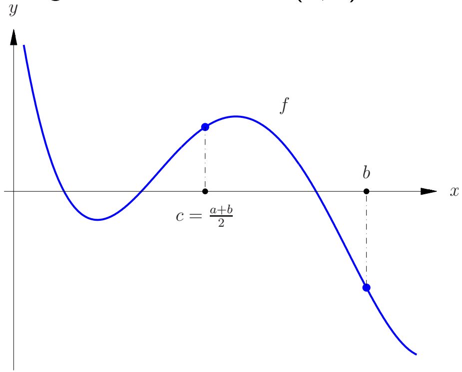
Bisektionsverfahren

Welches Teilintervall zu wählen ist kann durch den Wert $f(c)$ entschieden werden.



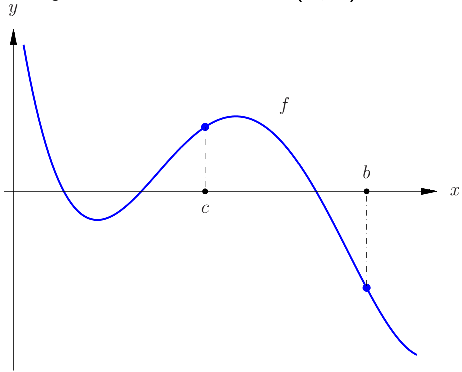
Bisektionsverfahren

Welches Teilintervall zu wählen ist kann durch den Wert $f(c)$ entschieden werden.
Ist $f(a)f(c) < 0$ so liegt eine Nullstelle in (a, c)
Ist $f(b)f(c) < 0$ so liegt eine Nullstelle in (c, b)



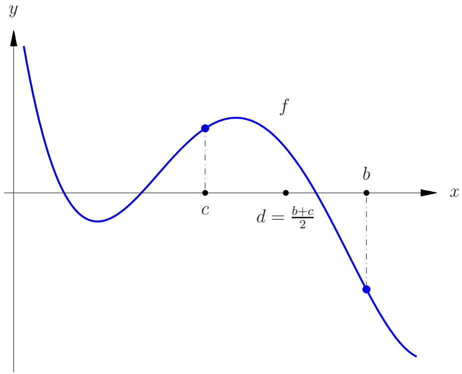
Bisektionsverfahren

Welches Teilintervall zu wählen ist kann durch den Wert $f(c)$ entschieden werden.
Ist $f(a)f(c) < 0$ so liegt eine Nullstelle in (a, c)
Ist $f(b)f(c) < 0$ so liegt eine Nullstelle in (c, b)



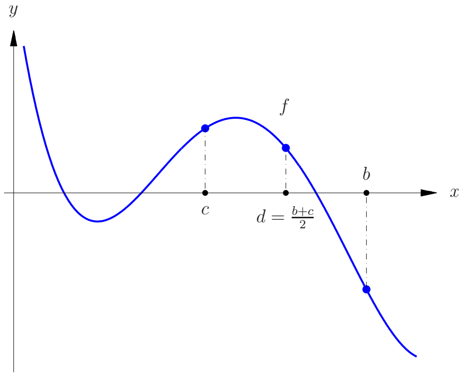
Bisektionsverfahren

Das neu gewonnen Intervall kann nun weiter unterteilt werden.



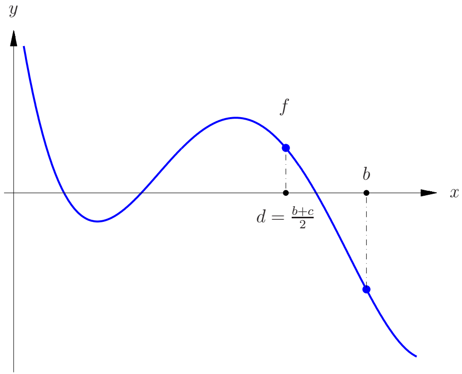
Bisektionsverfahren

Das neu gewonnen Intervall kann nun weiter unterteilt werden.



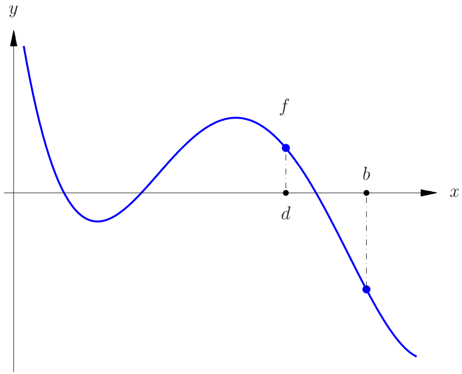
Bisektionsverfahren

Das neu gewonnen Intervall kann nun weiter unterteilt werden.



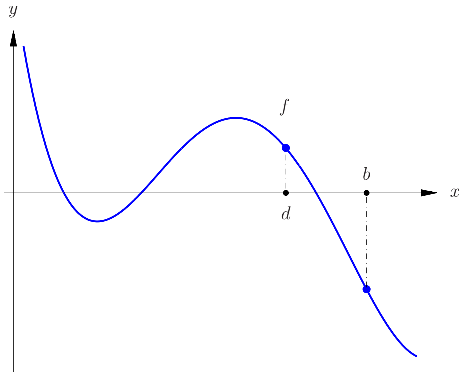
Bisektionsverfahren

In jedem Schritt wird die Intervalllänge halbiert.



Bisektionsverfahren

In jedem Schritt wird die Intervalllänge halbiert.
Um die Näherung an die Nullstelle um eine Dezimalstelle genauer zu erhalten müssen also $\log_2(10) \approx 3.32$ Schritte durchgeführt werden.

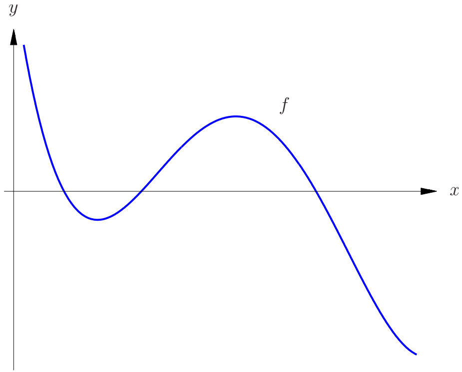


Newtonverfahren

Falls f differenzierbar ist, kann statt einer starren Intervallhalbierung der Schnittpunkt der die Tangente im aktuellen Punkt mit der x-Achse verwendet werden

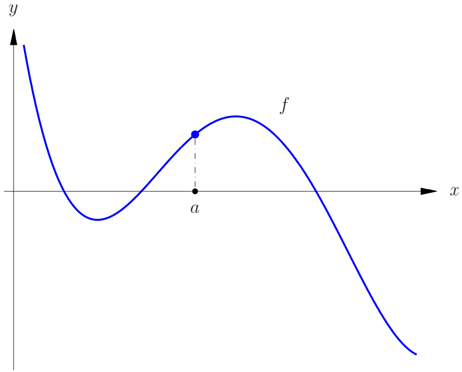
Newtonverfahren

Falls f differenzierbar ist, kann statt einer starren Intervallhalbierung der Schnittpunkt der die Tangente im aktuellen Punkt mit der x-Achse verwendet werden



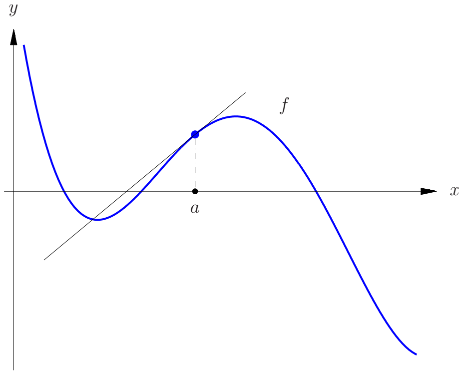
Newtonverfahren

Startwert a und Funktionswert $f(a)$



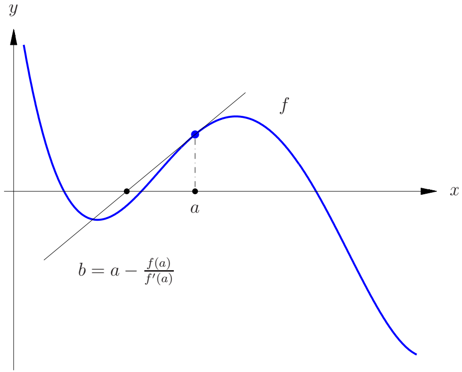
Newtonverfahren

Tangente in $(a, f(a))$



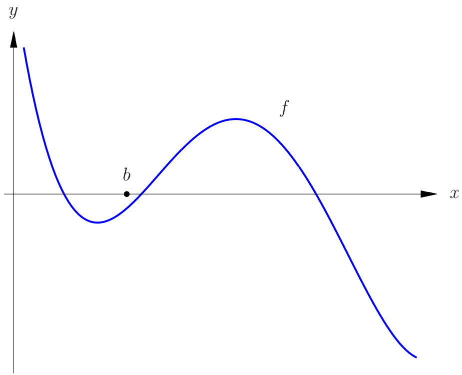
Newtonverfahren

Schnittpunkt b der Tangente mit der x-Achse



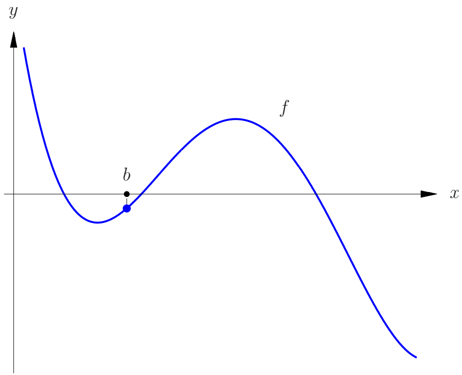
Newtonverfahren

Schnittpunkt b der Tangente mit der x-Achse



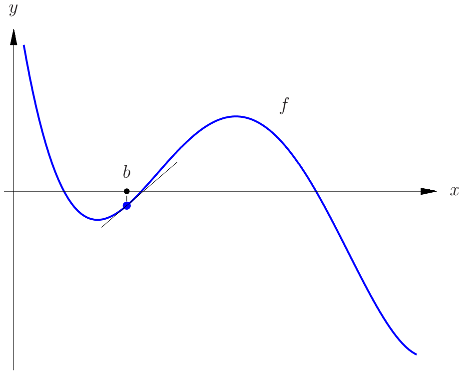
Newtonverfahren

Funktionswert $f(b)$



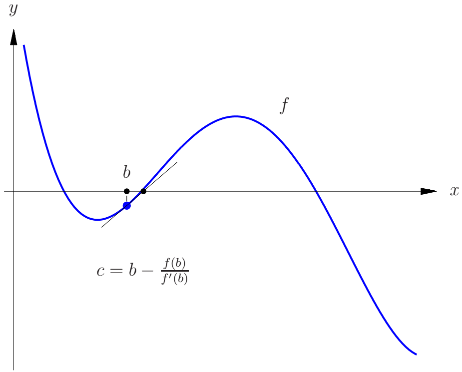
Newtonverfahren

Tangente in $(b, f(b))$



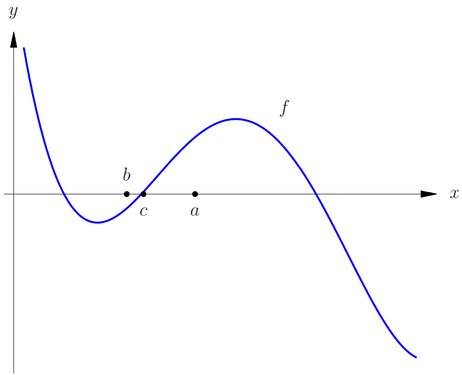
Newtonverfahren

Schnittpunkt c der Tangente mit der x-Achse



Newtonverfahren

Sehr schnelle Konvergenz gegen eine Nullstelle.



Konvergenz des Newtonverfahren

Konvergenz des Newtonverfahren

Ist s die Nullstelle von f, ergibt eine Taylor-Entwicklung um die Stelle x_ℓ

$$f(s) \quad = \quad f(x_\ell) + f'(x_\ell)(s - x_\ell) + r\,, \quad r = \frac{1}{2} f''(t)(s - x_\ell)^2$$

Konvergenz des Newtonverfahren

Ist s die Nullstelle von f, ergibt eine Taylor-Entwicklung um die Stelle x_ℓ

$$0 = f(s) \quad = \quad f(x_\ell) + f'(x_\ell)(s - x_\ell) + r\,, \quad r = \frac{1}{2} f''(t)(s - x_\ell)^2$$

Konvergenz des Newtonverfahren

Ist s die Nullstelle von f, ergibt eine Taylor-Entwicklung um die Stelle x_ℓ

$$0 \quad = \quad f(x_\ell) + f'(x_\ell)(s - x_\ell) + r\,, \quad r = \frac{1}{2} f''(t)(s - x_\ell)^2$$

Konvergenz des Newtonverfahren

Ist s die Nullstelle von f, ergibt eine Taylor-Entwicklung um die Stelle x_ℓ

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_\ell) + f'(x_\ell)(s - x_\ell) + r\,, \quad r = \frac{1}{2} f''(t)(s - x_\ell)^2 \\ -f(x_\ell) &= f'(x_\ell)(s - x_\ell) + r \end{aligned}$$

Konvergenz des Newtonverfahren

Ist s die Nullstelle von f, ergibt eine Taylor-Entwicklung um die Stelle x_ℓ

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_\ell) + f'(x_\ell)(s - x_\ell) + r\,, \quad r = \frac{1}{2} f''(t)(s - x_\ell)^2 \\ -f(x_\ell) &= f'(x_\ell)(s - x_\ell) + r \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Iterationsvorschrift

$$x_{\ell+1} = x_\ell - f(x_\ell)/f'(x_\ell)$$

Konvergenz des Newtonverfahren

Ist s die Nullstelle von f, ergibt eine Taylor-Entwicklung um die Stelle x_ℓ

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_\ell) + f'(x_\ell)(s - x_\ell) + r\,, \quad r = \frac{1}{2} f''(t)(s - x_\ell)^2 \\ -f(x_\ell) &= f'(x_\ell)(s - x_\ell) + r \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Iterationsvorschrift

$$x_{\ell+1} = x_\ell - f(x_\ell)/f'(x_\ell) = x_\ell + f'(x_\ell)(s - x_\ell)/f'(x_\ell) + r/f'(x_\ell)$$

Konvergenz des Newtonverfahren

Ist s die Nullstelle von f, ergibt eine Taylor-Entwicklung um die Stelle x_ℓ

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_\ell) + f'(x_\ell)(s - x_\ell) + r\,, \quad r = \frac{1}{2} f''(t)(s - x_\ell)^2 \\ -f(x_\ell) &= f'(x_\ell)(s - x_\ell) + r \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Iterationsvorschrift

$$\begin{aligned} x_{\ell+1} &= x_\ell - f(x_\ell)/f'(x_\ell) = x_\ell + f'(x_\ell)(s - x_\ell)/f'(x_\ell) + r/f'(x_\ell) \\ &= x_\ell + (s - x_\ell) + \frac{f''(t)}{2f'(x_\ell)}(s - x_\ell)^2 \end{aligned}$$

Konvergenz des Newtonverfahren

Ist s die Nullstelle von f, ergibt eine Taylor-Entwicklung um die Stelle x_ℓ

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_\ell) + f'(x_\ell)(s - x_\ell) + r\,, \quad r = \frac{1}{2} f''(t)(s - x_\ell)^2 \\ -f(x_\ell) &= f'(x_\ell)(s - x_\ell) + r \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Iterationsvorschrift

$$\begin{aligned} x_{\ell+1} &= x_\ell - f(x_\ell)/f'(x_\ell) = x_\ell + f'(x_\ell)(s - x_\ell)/f'(x_\ell) + r/f'(x_\ell) \\ &= x_\ell + (s - x_\ell) + \frac{f''(t)}{2f'(x_\ell)}(s - x_\ell)^2 = s + \frac{f''(t)}{2f'(x_\ell)}(s - x_\ell)^2 \end{aligned}$$

Konvergenz des Newtonverfahren

Ist s die Nullstelle von f, ergibt eine Taylor-Entwicklung um die Stelle x_ℓ

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_\ell) + f'(x_\ell)(s - x_\ell) + r\,, \quad r = \frac{1}{2} f''(t)(s - x_\ell)^2 \\ -f(x_\ell) &= f'(x_\ell)(s - x_\ell) + r \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Iterationsvorschrift

$$\begin{aligned} x_{\ell+1} &= x_\ell - f(x_\ell)/f'(x_\ell) = x_\ell + f'(x_\ell)(s - x_\ell)/f'(x_\ell) + r/f'(x_\ell) \\ &= x_\ell + (s - x_\ell) + \frac{f''(t)}{2f'(x_\ell)}(s - x_\ell)^2 = s + \frac{f''(t)}{2f'(x_\ell)}(s - x_\ell)^2 \end{aligned}$$

folgt

$$|s - x_{\ell+1}| \leq c|s - x_\ell|^2$$

also Konvergenz der Ordnung 2.

Newtonverfahren

- Ermittelt eine Nullstelle s einer differenzierbaren Funktion f: $f(s) = 0$

Newtonverfahren

- Ermittelt eine Nullstelle s einer differenzierbaren Funktion f: $f(s) = 0$
- Iterationsverfahren, beruhend auf der linearen Approximation von f durch die Tangente in x_ℓ:

$$x_{\ell+1} = x_\ell - f(x_\ell)/f'(x_\ell)$$

Newtonverfahren

- Ermittelt eine Nullstelle s einer differenzierbaren Funktion f: $f(s) = 0$
- Iterationsverfahren, beruhend auf der linearen Approximation von f durch die Tangente in x_ℓ:

$$x_{\ell+1} = x_\ell - f(x_\ell)/f'(x_\ell)$$

- ist f zweimal differenzierbar und $L = \max_{x\in[a,b]} \left| \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right| < 1$, so konvergiert das Newton-Verfahren

Newtonverfahren

- Ermittelt eine Nullstelle s einer differenzierbaren Funktion f: $f(s) = 0$
- Iterationsverfahren, beruhend auf der linearen Approximation von f durch die Tangente in x_ℓ:

$$x_{\ell+1} = x_\ell - f(x_\ell)/f'(x_\ell)$$

- ist f zweimal differenzierbar und $L = \max_{x\in[a,b]} \left| \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right| < 1$, so konvergiert das Newton-Verfahren
  - $|x_{\ell+1} - x_\ell| \leq L|x_\ell - x_{\ell-1}|$

Newtonverfahren

- Ermittelt eine Nullstelle s einer differenzierbaren Funktion f: $f(s) = 0$
- Iterationsverfahren, beruhend auf der linearen Approximation von f durch die Tangente in x_ℓ:

$$x_{\ell+1} = x_\ell - f(x_\ell)/f'(x_\ell)$$

- ist f zweimal differenzierbar und $L = \max\limits_{x\in[a,b]} \left| \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right| < 1$, so konvergiert das Newton-Verfahren
  - $|x_{\ell+1} - x_\ell| \leq L|x_\ell - x_{\ell-1}|$
  - $|x_\ell - s| \leq \frac{L^\ell}{1-L}|x_1 - x_0|$ (a priori Fehlerabschätzung)

Newtonverfahren

- Ermittelt eine Nullstelle s einer differenzierbaren Funktion f: $f(s) = 0$
- Iterationsverfahren, beruhend auf der linearen Approximation von f durch die Tangente in x_ℓ:

$$x_{\ell+1} = x_\ell - f(x_\ell)/f'(x_\ell)$$

- ist f zweimal differenzierbar und $L = \max_{x\in[a,b]} \left| \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right| < 1$, so konvergiert das Newton-Verfahren
  - $|x_{\ell+1} - x_\ell| \leq L|x_\ell - x_{\ell-1}|$
  - $|x_\ell - s| \leq \frac{L^\ell}{1-L}|x_1 - x_0|$ (a priori Fehlerabschätzung)
  - $|x_\ell - s| \leq \frac{1}{1-L}|x_{\ell+1} - x_\ell|$ (a posteriori Fehlerabschätzung)

Newtonverfahren

- Ermittelt eine Nullstelle s einer differenzierbaren Funktion f: $f(s) = 0$
- Iterationsverfahren, beruhend auf der linearen Approximation von f durch die Tangente in x_ℓ:

$$x_{\ell+1} = x_\ell - f(x_\ell)/f'(x_\ell)$$

- ist f zweimal differenzierbar und $L = \max\limits_{x\in[a,b]} \left| \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right| < 1$, so konvergiert das Newton-Verfahren
  - $|x_{\ell+1} - x_\ell| \leq L|x_\ell - x_{\ell-1}|$
  - $|x_\ell - s| \leq \frac{L^\ell}{1-L}|x_1 - x_0|$ (a priori Fehlerabschätzung)
  - $|x_\ell - s| \leq \frac{1}{1-L}|x_{\ell+1} - x_\ell|$ (a posteriori Fehlerabschätzung)
- konvergiert bei einfachen Nullstellen ($f'(s) \neq 0$) lokal quadratisch:

$$|x_{\ell+1} - s| \leq c|x_\ell - s|^2$$

Babylonisches Wurzelziehen

- Die Babylonier haben mit der Iteration

$$x_{\ell+1} = (x_\ell + a/x_\ell)/2$$

Wurzeln einer positiven Zahl a berechnet.

Babylonisches Wurzelziehen

- Die Babylonier haben mit der Iteration

$$x_{\ell+1} = (x_\ell + a/x_\ell)/2$$

  Wurzeln einer positiven Zahl a berechnet.
- Das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von $f(x) = x^2 - a$ liefert die Iterationsvorschrift

$$x_{\ell+1} = x_\ell - (x_\ell^2 - a)/(2x_\ell)$$

Babylonisches Wurzelziehen

- Die Babylonier haben mit der Iteration
$$x_{\ell+1} = (x_\ell + a/x_\ell)/2$$
Wurzeln einer positiven Zahl a berechnet.
- Das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von $f(x) = x^2 - a$ liefert die Iterationsvorschrift
$$x_{\ell+1} = x_\ell - (x_\ell^2 - a)/(2x_\ell) = \frac{2x_\ell^2 - x_\ell^2 + a}{2x_\ell}$$

Babylonisches Wurzelziehen

- Die Babylonier haben mit der Iteration

$$x_{\ell+1} = (x_\ell + a/x_\ell)/2$$

Wurzeln einer positiven Zahl a berechnet.

- Das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von $f(x) = x^2 - a$ liefert die Iterationsvorschrift

$$x_{\ell+1} = x_\ell - (x_\ell^2 - a)/(2x_\ell) = \frac{2x_\ell^2 - x_\ell^2 + a}{2x_\ell} = \frac{x_\ell^2 + a}{2x_\ell}$$

Babylonisches Wurzelziehen

- Die Babylonier haben mit der Iteration

$$x_{\ell+1} = (x_\ell + a/x_\ell)/2$$

Wurzeln einer positiven Zahl a berechnet.

- Das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von $f(x) = x^2 - a$ liefert die Iterationsvorschrift

$$x_{\ell+1} = x_\ell - (x_\ell^2 - a)/(2x_\ell) = \frac{2x_\ell^2 - x_\ell^2 + a}{2x_\ell} = \frac{x_\ell^2 + a}{2x_\ell} = \frac{x_\ell + a/x_\ell}{2}$$

Babylonisches Wurzelziehen

- Die Babylonier haben mit der Iteration
$$x_{\ell+1} = (x_\ell + a/x_\ell)/2$$
Wurzeln einer positiven Zahl a berechnet.
- Das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von $f(x) = x^2 - a$ liefert die Iterationsvorschrift
$$x_{\ell+1} = x_\ell - (x_\ell^2 - a)/(2x_\ell) = \frac{2x_\ell^2 - x_\ell^2 + a}{2x_\ell} = \frac{x_\ell^2 + a}{2x_\ell} = \frac{x_\ell + a/x_\ell}{2}$$
- Mit $a = 2, x_0 = 1$ ergeben sich die Näherungen

Babylonisches Wurzelziehen

- Die Babylonier haben mit der Iteration
$$x_{\ell+1} = (x_\ell + a/x_\ell)/2$$
Wurzeln einer positiven Zahl a berechnet.
- Das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von $f(x) = x^2 - a$ liefert die Iterationsvorschrift
$$x_{\ell+1} = x_\ell - (x_\ell^2 - a)/(2x_\ell) = \frac{2x_\ell^2 - x_\ell^2 + a}{2x_\ell} = \frac{x_\ell^2 + a}{2x_\ell} = \frac{x_\ell + a/x_\ell}{2}$$
- Mit $a = 2, x_0 = 1$ ergeben sich die Näherungen
$$x_1 = \underline{1}.5$$

Babylonisches Wurzelziehen

- Die Babylonier haben mit der Iteration

$$x_{\ell+1} = (x_\ell + a/x_\ell)/2$$

  Wurzeln einer positiven Zahl a berechnet.

- Das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von $f(x) = x^2 - a$ liefert die Iterationsvorschrift

$$x_{\ell+1} = x_\ell - (x_\ell^2 - a)/(2x_\ell) = \frac{2x_\ell^2 - x_\ell^2 + a}{2x_\ell} = \frac{x_\ell^2 + a}{2x_\ell} = \frac{x_\ell + a/x_\ell}{2}$$

- Mit $a = 2, x_0 = 1$ ergeben sich die Näherungen

$$x_1 = \underline{1}.5$$
$$x_2 = \underline{1.41}6666666666666666666666666666666666667$$

Babylonisches Wurzelziehen

- Die Babylonier haben mit der Iteration

$$x_{\ell+1} = (x_\ell + a/x_\ell)/2$$

  Wurzeln einer positiven Zahl a berechnet.

- Das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von $f(x) = x^2 - a$ liefert die Iterationsvorschrift

$$x_{\ell+1} = x_\ell - (x_\ell^2 - a)/(2x_\ell) = \frac{2x_\ell^2 - x_\ell^2 + a}{2x_\ell} = \frac{x_\ell^2 + a}{2x_\ell} = \frac{x_\ell + a/x_\ell}{2}$$

- Mit $a = 2, x_0 = 1$ ergeben sich die Näherungen

$$\begin{aligned} x_1 &= \underline{1}.5 \\ x_2 &= \underline{1.41}6666666666666666666666666666666666667 \\ x_3 &= \underline{1.41421}56862745098039215686274509803921 57 \end{aligned}$$

Babylonisches Wurzelziehen

- Die Babylonier haben mit der Iteration
$$x_{\ell+1} = (x_\ell + a/x_\ell)/2$$
Wurzeln einer positiven Zahl a berechnet.
- Das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von $f(x) = x^2 - a$ liefert die Iterationsvorschrift
$$x_{\ell+1} = x_\ell - (x_\ell^2 - a)/(2x_\ell) = \frac{2x_\ell^2 - x_\ell^2 + a}{2x_\ell} = \frac{x_\ell^2 + a}{2x_\ell} = \frac{x_\ell + a/x_\ell}{2}$$
- Mit $a = 2, x_0 = 1$ ergeben sich die Näherungen
$$\begin{aligned} x_1 &= \underline{1}.5 \\ x_2 &= \underline{1.41}666666666666666666666666666666666667 \\ x_3 &= \underline{1.41421}5686274509803921568627450980392157 \\ x_4 &= \underline{1.41421356237}4689910626295578890134910117 \end{aligned}$$

Babylonisches Wurzelziehen

- Die Babylonier haben mit der Iteration
$$x_{\ell+1} = (x_\ell + a/x_\ell)/2$$
Wurzeln einer positiven Zahl a berechnet.
- Das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von $f(x) = x^2 - a$ liefert die Iterationsvorschrift
$$x_{\ell+1} = x_\ell - (x_\ell^2 - a)/(2x_\ell) = \frac{2x_\ell^2 - x_\ell^2 + a}{2x_\ell} = \frac{x_\ell^2 + a}{2x_\ell} = \frac{x_\ell + a/x_\ell}{2}$$
- Mit $a = 2, x_0 = 1$ ergeben sich die Näherungen
$$\begin{aligned} x_1 &= \underline{1}.5 \\ x_2 &= \underline{1.41}6666666666666666666666666666666667 \\ x_3 &= \underline{1.41421}5686274509803921568627450980392157 \\ x_4 &= \underline{1.41421356237}4689910626295578890134910117 \\ x_5 &= \underline{1.41421356237309504880168}9623502530243615 \end{aligned}$$

Babylonisches Wurzelziehen

- Die Babylonier haben mit der Iteration

$$x_{\ell+1} = (x_\ell + a/x_\ell)/2$$

  Wurzeln einer positiven Zahl a berechnet.
- Das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von $f(x) = x^2 - a$ liefert die Iterationsvorschrift

$$x_{\ell+1} = x_\ell - (x_\ell^2 - a)/(2x_\ell) = \frac{2x_\ell^2 - x_\ell^2 + a}{2x_\ell} = \frac{x_\ell^2 + a}{2x_\ell} = \frac{x_\ell + a/x_\ell}{2}$$

- Mit $a = 2, x_0 = 1$ ergeben sich die Näherungen

$$\begin{aligned}
x_1 &= \underline{1}.5 \\
x_2 &= \underline{1.41}6666666666666666666666666666666666667 \\
x_3 &= \underline{1.41421}568627450980392156862745098039215\,7 \\
x_4 &= \underline{1.41421356237}468991062629557889013491011\,7 \\
x_5 &= \underline{1.41421356237309504880168}896235025302436\,15 \\
x_6 &= \underline{1.41421356237309504880168872420969807857\,0}
\end{aligned}$$

Newtonverfahren

- Nachteile

Newtonverfahren

- Nachteile
  - f muss differenzierbar sein

Newtonverfahren

- Nachteile
  - f muss differenzierbar sein
  - Startwert muss gut genug gewählt werden

Newtonverfahren

- Nachteile
  - f muss differenzierbar sein
  - Startwert muss gut genug gewählt werden
  - pro Iterationsschritt muss f und f' ausgewertet werden

Newtonverfahren

- Nachteile
  - f muss differenzierbar sein
  - Startwert muss gut genug gewählt werden
  - pro Iterationsschritt muss f und f' ausgewertet werden
- Vorteile

Newtonverfahren

- Nachteile
  - f muss differenzierbar sein
  - Startwert muss gut genug gewählt werden
  - pro Iterationsschritt muss f und f' ausgewertet werden
- Vorteile
  - quadratische Konvergenz

Newtonverfahren

- Nachteile
  - f muss differenzierbar sein
  - Startwert muss gut genug gewählt werden
  - pro Iterationsschritt muss f und f' ausgewertet werden
- Vorteile
  - quadratische Konvergenz
  - auch mehrdimensional verwendbar
    Anstelle von f' wird dann die Jacobi-Matrix verwendet und das Gleichungssystem $J_f(x_\ell)\delta = -f(x_\ell)$ gelöst.
    Der neue Wert ist dann $x_{\ell+1} = x_\ell + \delta$

Beispiel

Ausgehend von den Startwerten $1, 2$ und 3 werden jeweils drei Schritte des Newton-Verfahrens durchgeführt, um eine Nullstelle des Polynoms $f(x) = x^3 - 16x$ zu finden.

Beispiel

Ausgehend von den Startwerten $1, 2$ und 3 werden jeweils drei Schritte des Newton-Verfahrens durchgeführt, um eine Nullstelle des Polynoms $f(x) = x^3 - 16x$ zu finden.
Für $f(x) = x^3 - 16x$ ist $f'(x) = 3x^2 - 16$ und damit die Iteration des Newton-Verfahrens

Beispiel

Ausgehend von den Startwerten $1, 2$ und 3 werden jeweils drei Schritte des Newton-Verfahrens durchgeführt, um eine Nullstelle des Polynoms $f(x) = x^3 - 16x$ zu finden.
Für $f(x) = x^3 - 16x$ ist $f'(x) = 3x^2 - 16$ und damit die Iteration des Newton-Verfahrens

$$x_{n+1}$$

Beispiel

Ausgehend von den Startwerten $1, 2$ und 3 werden jeweils drei Schritte des Newton-Verfahrens durchgeführt, um eine Nullstelle des Polynoms $f(x) = x^3 - 16x$ zu finden.
Für $f(x) = x^3 - 16x$ ist $f'(x) = 3x^2 - 16$ und damit die Iteration des Newton-Verfahrens

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 16x_n}{3x_n^2 - 16}$$

Beispiel

Ausgehend von den Startwerten $1, 2$ und 3 werden jeweils drei Schritte des Newton-Verfahrens durchgeführt, um eine Nullstelle des Polynoms $f(x) = x^3 - 16x$ zu finden.
Für $f(x) = x^3 - 16x$ ist $f'(x) = 3x^2 - 16$ und damit die Iteration des Newton-Verfahrens

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 16x_n}{3x_n^2 - 16} = \frac{3x_n^3 - 16x_n - x_n^3 + 16x_n}{3x_n^2 - 16}$$

Beispiel

Ausgehend von den Startwerten $1, 2$ und 3 werden jeweils drei Schritte des Newton-Verfahrens durchgeführt, um eine Nullstelle des Polynoms $f(x) = x^3 - 16x$ zu finden.
Für $f(x) = x^3 - 16x$ ist $f'(x) = 3x^2 - 16$ und damit die Iteration des Newton-Verfahrens

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 16x_n}{3x_n^2 - 16} = \frac{3x_n^3 - 16x_n - x_n^3 + 16x_n}{3x_n^2 - 16} = \frac{2x_n^3}{3x_n^2 - 16}$$

Beispiel

Ausgehend von den Startwerten $1, 2$ und 3 werden jeweils drei Schritte des Newton-Verfahrens durchgeführt, um eine Nullstelle des Polynoms $f(x) = x^3 - 16x$ zu finden.
Für $f(x) = x^3 - 16x$ ist $f'(x) = 3x^2 - 16$ und damit die Iteration des Newton-Verfahrens

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 16x_n}{3x_n^2 - 16} = \frac{3x_n^3 - 16x_n - x_n^3 + 16x_n}{3x_n^2 - 16} = \frac{2x_n^3}{3x_n^2 - 16}$$

Ist der Ausgangswert rational, $x_n = p/q$, so kann der neue Wert auch in der Form

$$x_{n+1} = \frac{2p^3/q^3}{3p^2/q^2 - 16}$$

geschrieben werden.

Beispiel

Ausgehend von den Startwerten $1, 2$ und 3 werden jeweils drei Schritte des Newton-Verfahrens durchgeführt, um eine Nullstelle des Polynoms $f(x) = x^3 - 16x$ zu finden.
Für $f(x) = x^3 - 16x$ ist $f'(x) = 3x^2 - 16$ und damit die Iteration des Newton-Verfahrens

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 16x_n}{3x_n^2 - 16} = \frac{3x_n^3 - 16x_n - x_n^3 + 16x_n}{3x_n^2 - 16} = \frac{2x_n^3}{3x_n^2 - 16}$$

Ist der Ausgangswert rational, $x_n = p/q$, so kann der neue Wert auch in der Form

$$x_{n+1} = \frac{2p^3/q^3}{3p^2/q^2 - 16} = \frac{2p^3}{(3p^2 - 16q^2)q}$$

geschrieben werden.

Beispiel

Iteration:

$$x_{n+1} = \frac{2p^3}{(3p^2 - 16q^2)q}, \quad x_n = p/q$$

Beispiel

Iteration:

$$x_{n+1} = \frac{2p^3}{(3p^2 - 16q^2)q}, \quad x_n = p/q$$

Für $x_0 = 1$:

Beispiel

Iteration:

$$x_{n+1} = \frac{2p^3}{(3p^2 - 16q^2)q}, \quad x_n = p/q$$

Für $x_0 = 1$:

$$x_1 = \frac{2 \cdot 1^3}{3 \cdot 1^2 - 16} = -2/13 \approx -.15,$$

Beispiel

Iteration:

$$x_{n+1} = \frac{2p^3}{(3p^2 - 16q^2)q}\,, \quad x_n = p/q$$

Für $x_0 = 1$:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2 \cdot 1^3}{3 \cdot 1^2 - 16} = -2/13 \approx -.15\,, \\ x_2 &= \frac{2 \cdot (-2)^3}{3 \cdot (-2)^2 \cdot 13 - 16 \cdot 13^3} = 4/8749 \approx 4.6 \cdot 10^{-4}\,, \end{aligned}$$

Beispiel

Iteration:

$$x_{n+1} = \frac{2p^3}{(3p^2 - 16q^2)q}, \quad x_n = p/q$$

Für $x_0 = 1$:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{2 \cdot 1^3}{3 \cdot 1^2 - 16} = -2/13 \approx -.15\,, \\
x_2 &= \frac{2 \cdot (-2)^3}{3 \cdot (-2)^2 \cdot 13 - 16 \cdot 13^3} = 4/8749 \approx 4.6 \cdot 10^{-4}\,, \\
x_3 &= \cdots = -4/334846093751 \approx -1.2 \cdot 10^{-11}\,.
\end{aligned}$$

Beispiel

Iteration:

$$x_{n+1} = \frac{2p^3}{(3p^2 - 16q^2)q}, \quad x_n = p/q$$

Für $x_0 = 2$:

Beispiel

Iteration:

$$x_{n+1} = \frac{2p^3}{(3p^2 - 16q^2)q}\,, \quad x_n = p/q$$

Für $x_0 = 2$:

$$x_1 = \frac{2 \cdot (2)^3}{3 \cdot (2)^2 - 16} = -4\,.$$

Beispiel

Iteration:

$$x_{n+1} = \frac{2p^3}{(3p^2 - 16q^2)q}\,, \quad x_n = p/q$$

Für $x_0 = 2$:

$$x_1 = \frac{2 \cdot (2)^3}{3 \cdot (2)^2 - 16} = -4\,.$$

Da $f(-4) = 0$ gilt, ist die Nullstelle gefunden und daher $x_2 = x_3 = -4$.

Beispiel

Iteration:

$$x_{n+1} = \frac{2p^3}{(3p^2 - 16q^2)q}\,, \quad x_n = p/q$$

Für $x_0 = 2$:

$$x_1 = \frac{2 \cdot (2)^3}{3 \cdot (2)^2 - 16} = -4\,.$$

Da $f(-4) = 0$ gilt, ist die Nullstelle gefunden und daher $x_2 = x_3 = -4$. Obwohl das Polynom auch Nullstellen bei 0 und 4 hat, wird mit dem Startwert 2 die Nullstelle bei -4 erreicht.

Beispiel

Iteration:

$$x_{n+1} = \frac{2p^3}{(3p^2 - 16q^2)q}, \quad x_n = p/q$$

Für $x_0 = 3$:

Beispiel

Iteration:

$$x_{n+1} = \frac{2p^3}{(3p^2 - 16q^2)q}\,, \quad x_n = p/q$$

Für $x_0 = 3$:

$$x_1 = \frac{2 \cdot 3^3}{3 \cdot 3^2 - 16} = 54/11 \approx 4.909\,,$$

Beispiel

Iteration:

$$x_{n+1} = \frac{2p^3}{(3p^2 - 16q^2)q}\,, \quad x_n = p/q$$

Für $x_0 = 3$:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2 \cdot 3^3}{3 \cdot 3^2 - 16} = 54/11 \approx 4.909\,, \\ x_2 &= \ldots = 78732/18733 \approx 4.20\,, \end{aligned}$$

Beispiel

Iteration:

$$x_{n+1} = \frac{2p^3}{(3p^2 - 16q^2)q}, \quad x_n = p/q$$

Für $x_0 = 3$:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2 \cdot 3^3}{3 \cdot 3^2 - 16} = 54/11 \approx 4.909\,, \\ x_2 &= \ldots = 78732/18733 \approx 4.20\,, \\ x_3 &= \cdots \approx 4.01\,. \end{aligned}$$

Beispiel

Iteration:

$$x_{n+1} = \frac{2p^3}{(3p^2 - 16q^2)q}, \quad x_n = p/q$$

$$\begin{array}{llllllll}
x_0 = 1 & \to & x_1 \approx -0.15 & \to & x_2 \approx 4.6 \cdot 10^{-4} & \to & x_3 \approx -1.19 \cdot 10^{-11} \\
x_0 = 2 & \to & x_1 = -4 & \to & x_2 = -4 & \to & x_3 = -4 \\
x_0 = 3 & \to & x_1 \approx 4.91 & \to & x_2 \approx 4.20 & \to & x_3 \approx 4.01
\end{array}$$

Aufgabe 1

Es soll der Wert des goldenen Schnittes $(1+\sqrt{5})/2$ mit Hilfe des Newton-Verfahrens angenähert werden.

- Geben Sie ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten an, das den goldenen Schnitt als Nullstelle hat.
- Geben Sie für dieses Polynom die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens an.
- Überprüfen Sie, ob das Verfahren für Startwerte im Intervall [3/2,2] konvergiert.
- Geben Sie an, wieviele Iterationsschritte ausgehend vom Startwert $x_0 = 3/2$ maximal durchgeführt werden müssen, um den goldenen Schnitt mit einem Fehler kleiner 10^{-9} anzugeben.
- Implementieren Sie das Verfahren in Matlab.
- Lagern Sie die Berechnung des Funktionswerts und des Wertes der Ableitung in Unterfunktionen aus, die Sie mit `feval` auswerten.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(1)

Geben Sie ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten an, das den goldenen Schnitt als Nullstelle hat.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(1)

Geben Sie ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten an, das den goldenen Schnitt als Nullstelle hat.

$$x = (1 + \sqrt{5})/2$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(1)

Geben Sie ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten an, das den goldenen Schnitt als Nullstelle hat.

$$x = (1 + \sqrt{5})/2 \Leftrightarrow 2x - 1 = \sqrt{5}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(1)

Geben Sie ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten an, das den goldenen Schnitt als Nullstelle hat.

$$x = (1 + \sqrt{5})/2 \Leftrightarrow 2x - 1 = \sqrt{5} \Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 5$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(1)

Geben Sie ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten an, das den goldenen Schnitt als Nullstelle hat.

$$x = (1 + \sqrt{5})/2 \Leftrightarrow 2x - 1 = \sqrt{5} \Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 5$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 4 = 0$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(1)

Geben Sie ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten an, das den goldenen Schnitt als Nullstelle hat.

$$x = (1+\sqrt{5})/2 \Leftrightarrow 2x - 1 = \sqrt{5} \Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 5$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(1)

Geben Sie ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten an, das den goldenen Schnitt als Nullstelle hat.

$$x = (1 + \sqrt{5})/2 \Leftrightarrow 2x - 1 = \sqrt{5} \Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 5$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

Geben Sie für dieses Polynom die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens an.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(1)

Geben Sie ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten an, das den goldenen Schnitt als Nullstelle hat.

$$x = (1+\sqrt{5})/2 \Leftrightarrow 2x - 1 = \sqrt{5} \Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 5$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

Geben Sie für dieses Polynom die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens an.
$f(x) = x^2 - x - 1$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(1)

Geben Sie ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten an, das den goldenen Schnitt als Nullstelle hat.

$$x = (1 + \sqrt{5})/2 \Leftrightarrow 2x - 1 = \sqrt{5} \Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 5$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

Geben Sie für dieses Polynom die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens an.
$f(x) = x^2 - x - 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 1$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(1)

Geben Sie ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten an, das den goldenen Schnitt als Nullstelle hat.

$$x = (1 + \sqrt{5})/2 \Leftrightarrow 2x - 1 = \sqrt{5} \Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 5$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

Geben Sie für dieses Polynom die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens an.
$f(x) = x^2 - x - 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 1$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(1)

Geben Sie ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten an, das den goldenen Schnitt als Nullstelle hat.

$$x = (1 + \sqrt{5})/2 \Leftrightarrow 2x - 1 = \sqrt{5} \Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 5$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

Geben Sie für dieses Polynom die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens an.
$f(x) = x^2 - x - 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 1$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - x_n - 1}{2x_n - 1}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(1)

Geben Sie ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten an, das den goldenen Schnitt als Nullstelle hat.

$$x = (1+\sqrt{5})/2 \Leftrightarrow 2x-1 = \sqrt{5} \Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 5$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

Geben Sie für dieses Polynom die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens an.
$f(x) = x^2 - x - 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 1$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - x_n - 1}{2x_n - 1} = \frac{x_n^2 + 1}{2x_n - 1}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(2)

Überprüfen Sie, ob das Verfahren für Startwerte im Intervall [3/2,2] konvergiert.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(2)

Überprüfen Sie, ob das Verfahren für Startwerte im Intervall [3/2,2] konvergiert.

$f(x) = x^2 - x - 1$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(2)

Überprüfen Sie, ob das Verfahren für Startwerte im Intervall [3/2,2] konvergiert.

$f(x) = x^2 - x - 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 1$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(2)

Überprüfen Sie, ob das Verfahren für Startwerte im Intervall [3/2,2] konvergiert.

$f(x) = x^2 - x - 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 1 \Rightarrow f''(x) = 2$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(2)

Überprüfen Sie, ob das Verfahren für Startwerte im Intervall [3/2,2] konvergiert.

$f(x) = x^2 - x - 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 1 \Rightarrow f''(x) = 2$

$$\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(2)

Überprüfen Sie, ob das Verfahren für Startwerte im Intervall [3/2,2] konvergiert.

$f(x) = x^2 - x - 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 1 \Rightarrow f''(x) = 2$

$$\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{2x^2 - 2x - 2}{4x^2 - 4x + 1}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(2)

Überprüfen Sie, ob das Verfahren für Startwerte im Intervall [3/2,2] konvergiert.

$f(x) = x^2 - x - 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 1 \Rightarrow f''(x) = 2$

$$\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{2x^2 - 2x - 2}{4x^2 - 4x + 1} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2(4x^2 - 4x + 1)}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(2)

Überprüfen Sie, ob das Verfahren für Startwerte im Intervall [3/2,2] konvergiert.

$f(x) = x^2 - x - 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 1 \Rightarrow f''(x) = 2$

$$\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{2x^2 - 2x - 2}{4x^2 - 4x + 1} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2(4x^2 - 4x + 1)}$$

Nenner ist im Intervall monoton (Parabel mit Scheitel bei $1/2$), es genügt die Ränder zu betrachten.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(2)

Überprüfen Sie, ob das Verfahren für Startwerte im Intervall [3/2,2] konvergiert.

$f(x) = x^2 - x - 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 1 \Rightarrow f''(x) = 2$

$$\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{2x^2 - 2x - 2}{4x^2 - 4x + 1} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2(4x^2 - 4x + 1)}$$

Nenner ist im Intervall monoton (Parabel mit Scheitel bei $1/2$), es genügt die Ränder zu betrachten.

$$x = 3/2 :$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(2)

Überprüfen Sie, ob das Verfahren für Startwerte im Intervall [3/2,2] konvergiert.

$f(x) = x^2 - x - 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 1 \Rightarrow f''(x) = 2$

$$\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{2x^2 - 2x - 2}{4x^2 - 4x + 1} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2(4x^2 - 4x + 1)}$$

Nenner ist im Intervall monoton (Parabel mit Scheitel bei $1/2$), es genügt die Ränder zu betrachten.

$$x = 3/2: \;\; f(x) = -1/4, \;\; f'(x) = 2$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(2)

Überprüfen Sie, ob das Verfahren für Startwerte im Intervall [3/2,2] konvergiert.

$f(x) = x^2 - x - 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 1 \Rightarrow f''(x) = 2$

$$\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{2x^2 - 2x - 2}{4x^2 - 4x + 1} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2(4x^2 - 4x + 1)}$$

Nenner ist im Intervall monoton (Parabel mit Scheitel bei $1/2$), es genügt die Ränder zu betrachten.

$$x = 3/2: \;\; f(x) = -1/4, \;\; f'(x) = 2 \rightarrow L_u = |-1/8| < 1$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(2)

Überprüfen Sie, ob das Verfahren für Startwerte im Intervall [3/2,2] konvergiert.

$f(x) = x^2 - x - 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 1 \Rightarrow f''(x) = 2$

$$\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{2x^2 - 2x - 2}{4x^2 - 4x + 1} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2(4x^2 - 4x + 1)}$$

Nenner ist im Intervall monoton (Parabel mit Scheitel bei $1/2$), es genügt die Ränder zu betrachten.

$$x = 3/2: \;\; f(x) = -1/4, \;\; f'(x) = 2 \rightarrow L_u = |-1/8| < 1$$

$$x = 2:$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(2)

Überprüfen Sie, ob das Verfahren für Startwerte im Intervall [3/2,2] konvergiert.

$f(x) = x^2 - x - 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 1 \Rightarrow f''(x) = 2$

$$\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{2x^2 - 2x - 2}{4x^2 - 4x + 1} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2(4x^2 - 4x + 1)}$$

Nenner ist im Intervall monoton (Parabel mit Scheitel bei 1/2), es genügt die Ränder zu betrachten.

$$x = 3/2: \;\; f(x) = -1/4, \;\; f'(x) = 2 \rightarrow L_u = |-1/8| < 1$$

$$x = 2: \;\; f(x) = 1, \;\; f'(x) = 3$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(2)

Überprüfen Sie, ob das Verfahren für Startwerte im Intervall [3/2,2] konvergiert.

$f(x) = x^2 - x - 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 1 \Rightarrow f''(x) = 2$

$$\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{2x^2 - 2x - 2}{4x^2 - 4x + 1} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2(4x^2 - 4x + 1)}$$

Nenner ist im Intervall monoton (Parabel mit Scheitel bei $1/2$), es genügt die Ränder zu betrachten.

$$x = 3/2: \; f(x) = -1/4, \; f'(x) = 2 \rightarrow L_u = |-1/8| < 1$$

$$x = 2: \; f(x) = 1, \; f'(x) = 3 \rightarrow L_o = |2/9| < 1$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(2)

Überprüfen Sie, ob das Verfahren für Startwerte im Intervall [3/2,2] konvergiert.

$f(x) = x^2 - x - 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 1 \Rightarrow f''(x) = 2$

$$\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{2x^2 - 2x - 2}{4x^2 - 4x + 1} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2(4x^2 - 4x + 1)}$$

Nenner ist im Intervall monoton (Parabel mit Scheitel bei $1/2$), es genügt die Ränder zu betrachten.

$$x = 3/2: \; f(x) = -1/4, \; f'(x) = 2 \rightarrow L_u = |-1/8| < 1$$

$$x = 2: \; f(x) = 1, \; f'(x) = 3 \rightarrow L_o = |2/9| < 1$$

Fixpunkt liegt im Intervall, Kontraktion liegt vor ($L = \max\{L_u, L_o\} = 2/9 < 1$) also konvergiert das Newton Verfahren.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(3)

Geben Sie an, wieviele Iterationsschritte ausgehend vom Startwert $x_0 = 3/2$ maximal durchgeführt werden müssen, um den goldenen Schnitt mit einem Fehler kleiner 10^{-9} anzugeben.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(3)

Geben Sie an, wieviele Iterationsschritte ausgehend vom Startwert $x_0 = 3/2$ maximal durchgeführt werden müssen, um den goldenen Schnitt mit einem Fehler kleiner 10^{-9} anzugeben.

$$|x_\ell - x_*| < \frac{L^\ell}{1-L}|x_1 - x_0|$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(3)

Geben Sie an, wieviele Iterationsschritte ausgehend vom Startwert $x_0 = 3/2$ maximal durchgeführt werden müssen, um den goldenen Schnitt mit einem Fehler kleiner 10^{-9} anzugeben.

$$|x_\ell - x_*| < \frac{L^\ell}{1-L}|x_1 - x_0|$$

$$x_1 = \frac{x_0^2 + 1}{2x_0 - 1}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(3)

Geben Sie an, wieviele Iterationsschritte ausgehend vom Startwert $x_0 = 3/2$ maximal durchgeführt werden müssen, um den goldenen Schnitt mit einem Fehler kleiner 10^{-9} anzugeben.

$$|x_\ell - x_*| < \frac{L^\ell}{1-L}|x_1 - x_0|$$

$$x_1 = \frac{x_0^2 + 1}{2x_0 - 1} = \frac{9/4 + 1}{3 - 1}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(3)

Geben Sie an, wieviele Iterationsschritte ausgehend vom Startwert $x_0 = 3/2$ maximal durchgeführt werden müssen, um den goldenen Schnitt mit einem Fehler kleiner 10^{-9} anzugeben.

$$|x_\ell - x_*| < \frac{L^\ell}{1-L}|x_1 - x_0|$$

$$x_1 = \frac{x_0^2 + 1}{2x_0 - 1} = \frac{9/4 + 1}{3 - 1} = 13/8$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(3)

Geben Sie an, wieviele Iterationsschritte ausgehend vom Startwert $x_0 = 3/2$ maximal durchgeführt werden müssen, um den goldenen Schnitt mit einem Fehler kleiner 10^{-9} anzugeben.

$$|x_\ell - x_*| < \frac{L^\ell}{1-L}|x_1 - x_0|$$

$$x_1 = \frac{x_0^2 + 1}{2x_0 - 1} = \frac{9/4 + 1}{3 - 1} = 13/8$$

$$L = 2/9\,, \quad |x_1 - x_0| = 13/8 - 3/2 = 1/8$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(3)

Geben Sie an, wieviele Iterationsschritte ausgehend vom Startwert $x_0 = 3/2$ maximal durchgeführt werden müssen, um den goldenen Schnitt mit einem Fehler kleiner 10^{-9} anzugeben.

$$|x_\ell - x_*| < \frac{L^\ell}{1-L}|x_1 - x_0|$$

$$x_1 = \frac{x_0^2 + 1}{2x_0 - 1} = \frac{9/4 + 1}{3 - 1} = 13/8$$

$$L = 2/9\,, \quad |x_1 - x_0| = 13/8 - 3/2 = 1/8 \Rightarrow \frac{(2/9)^\ell}{1 - 2/9} \cdot 1/8 < 1E - 9$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(3)

Geben Sie an, wieviele Iterationsschritte ausgehend vom Startwert $x_0 = 3/2$ maximal durchgeführt werden müssen, um den goldenen Schnitt mit einem Fehler kleiner 10^{-9} anzugeben.

$$|x_\ell - x_*| < \frac{L^\ell}{1-L}|x_1 - x_0|$$

$$x_1 = \frac{x_0^2+1}{2x_0-1} = \frac{9/4+1}{3-1} = 13/8$$

$$L = 2/9\,, \quad |x_1 - x_0| = 13/8 - 3/2 = 1/8 \Rightarrow \frac{(2/9)^\ell}{1-2/9} \cdot 1/8 < 1E-9$$

$$\Rightarrow (2/9)^\ell < \frac{7 \cdot 8}{9 \cdot 1000000000}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(3)

Geben Sie an, wieviele Iterationsschritte ausgehend vom Startwert $x_0 = 3/2$ maximal durchgeführt werden müssen, um den goldenen Schnitt mit einem Fehler kleiner 10^{-9} anzugeben.

$$|x_\ell - x_*| < \frac{L^\ell}{1-L}|x_1 - x_0|$$

$$x_1 = \frac{x_0^2 + 1}{2x_0 - 1} = \frac{9/4 + 1}{3 - 1} = 13/8$$

$$L = 2/9\,, \quad |x_1 - x_0| = 13/8 - 3/2 = 1/8 \Rightarrow \frac{(2/9)^\ell}{1 - 2/9} \cdot 1/8 < 1E - 9$$

$$\Rightarrow (2/9)^\ell < \frac{7 \cdot 8}{9 \cdot 1000000000} \Rightarrow \ell > 12$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(4)

Implementieren Sie das Verfahren in Matlab.

```
x(1)=3/2;

for k=1:13
    x(k+1)=(x(k).^2+1)/(2*x(k)-1);
end
```

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1(5)

Lagern Sie die Berechnung des Funktionswerts und des Wertes der Ableitung in Unterfunktionen aus, die Sie mit `feval` auswerten.

```
function x=newtongoldenerschnitt(x,tol)
f_name='gs';
df_name='diff_gs';
xa=2*x;

while (abs(x-xa) > tol)
    f=feval(f_name,x);
    df=feval(df_name,x);
    xa=x;
    x=xa-df\f;
end
```

```
function  f=gs(x)
f=x.^2-x-1;
```

```
function df=diff_gs(x)
df = 2*x-1;
```

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass durch die Newton-Iteration für

$$f(x) = a - 1/x$$

der Kehrwert einer positiven Zahl a ohne Division berechnet werden kann. Führen Sie zwei Schritte des Verfahrens für $a = 3$ und $x_0 = 1/2$ aus.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2

Kehrwert

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a - \frac{1}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{a}$$

Iteration

$$f(x) = a - \frac{1}{x} \text{ und } f'(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - (a - 1/x_n)x_n^2 = x_n(2 - ax_n)$$

Zwei Schritte für $a = 3$:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{2} \\ x_1 &= \frac{1}{2}\left(2 - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4} \\ x_2 &= \frac{1}{4}\left(2 - \frac{3}{4}\right) = \frac{5}{16} = .3125 \end{aligned}$$